۱

« بسمه تعالی »

کنترل خطی

جلسه اول (دوم) - ۸۹،۱۲،۳

مهندسی کنترل   اوگاتا   (ترجمه ریاضی)

$x(t) = \sin t$ سیگنال

سیستم → خطی
→ غیرخطی

$y(t) = \sin(x(t))$

غیرخطی

$y(t) = \sin(x(t))$

سیستم → تغییرپذیر با زمان
→ تغییرناپذیر با زمان → با گذشت زمان خروجی آن تغییر نمی‌کند.

$x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$

LTI : linear Time invariant system

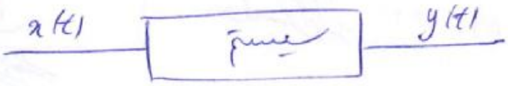
اگر پاسخ ضربه آن را داشته باشیم تمامی خروجی‌های آن را می‌توانیم بدست آوریم

$x(t) * h(t) \xrightarrow{\text{لاپلاس}} X(s)H(s)$

***

الزاما در این درس بین ورودی و خروجی ما یک معادله دیفرانسیل خطی برقرار است.

۲

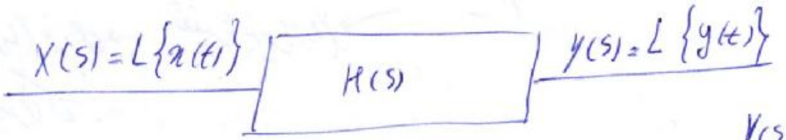


$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} \dots b_0 x(t)$$

تابع انتقال سیستم:

نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به ورودی سیستم

تابع انتقال در حوزه فرکانس



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

مثال:

با فرض شرایط اولیه صفر تابع انتقال سیستم زیر را بدست آورید.

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 3\frac{d^2x(t)}{dt} + 6\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

زمان = حروف کوچک

حوزه لاپلاس = حروف بزرگ

$$2s^2Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = 3s^2X(s) + 6sX(s) + 2X(s)$$

$$Y(s)(2s^2+5s+4) = X(s)(3s^2+6s+2) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3s^2+6s+2}{2s^2+5s+4}$$

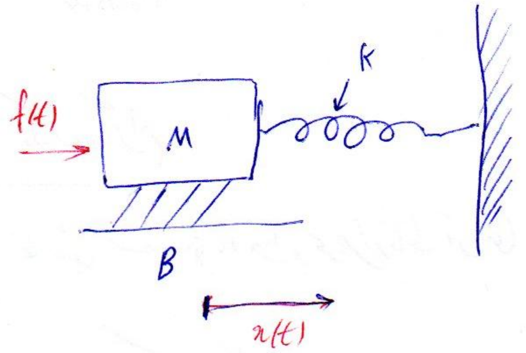
«بسمه تعالی»

ص ۳ - کنترل   جلسه دوم ۸۹,۱۲,۳۰

مثال: سیستم مکانیکی شکل زیر مفروض است.

الف: تابع انتقال سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید.

ب: اگر $M=1^{kg}$ ، $B=5$ و $K=6$ باشد، به ازای نیروی پله واحد جابجایی برحسب زمان را بدست آورید.



$$f(t) = Ma + Bv + Kx(t)$$

$$\underbrace{f(t)}_{\text{ورودی = نیرو}} = M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + B\frac{dx(t)}{dt} + K\underbrace{x(t)}_{\text{جابجایی = خروجی}}$$

$$Ms^2X(s) + BsX(s) + KX(s) = F(s)$$

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2+Bs+K}$$

$$\frac{1}{s} \times \frac{1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{s(s+3)(s+2)} = \cancel{\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2}}$$

$$\cancel{\frac{1}{s^3+5s^2+6s}} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+2}$$

$s(s+2)(s+3)$ $\qquad A = +\frac{1}{6} \qquad B = \frac{1}{3} \qquad C = -\frac{1}{2}$

پاسخ ماندگار

$$x(t) = \frac{1}{6}u(t) + \frac{1}{3}e^{-3t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

پاسخ گذرا

$t = 0 \longrightarrow x(t) = 0$

$t \to \infty \longrightarrow x(t) = \frac{1}{6}$

٤

با استفاده از این قضیه نیاز نیست که دوباره به حوزه زمان برگردیم و پاسخ نهایی را تعیین کنیم می توانیم مستقیماً از روی معادله لاپلاس پاسخ نهایی را بدست آوریم.

$\boxed{\text{قضیه مقدار نهایی:}}$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s) =$$

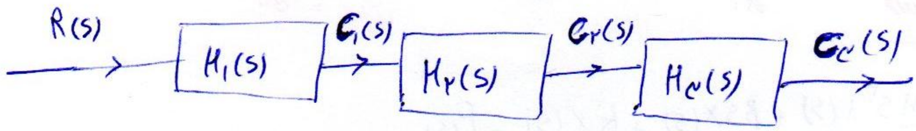
$$= s \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{6}$$

بلوک دیاگرام:

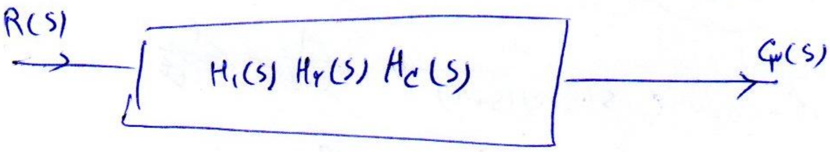
نمایش سیستم با اجزا و نحوه ارتباط آن ها

ساده سازی بلوک دیاگرام:

الف - سیستم های سری:



$$H_1(s) = \frac{C_1(s)}{R(s)} \qquad H_2(s) = \frac{C_2(s)}{C_1(s)} \qquad H_3(s) = \frac{C_3(s)}{C_2(s)}$$



$$\frac{C_3(s)}{R(s)} = \frac{C_1(s)}{R(s)} \times \frac{C_2(s)}{C_1(s)} \times \frac{C_3(s)}{C_2(s)} = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s)$$

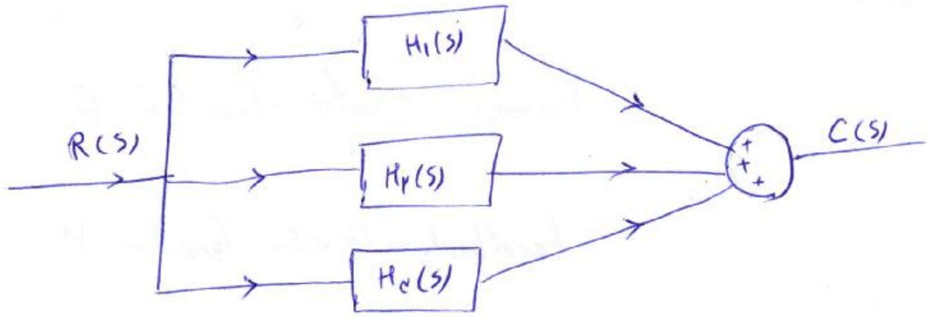
معادل تابع انتقال سیستم های سری، حاصلضرب تابع انتقال آن هاست.

۵

«بسمه تعالی»

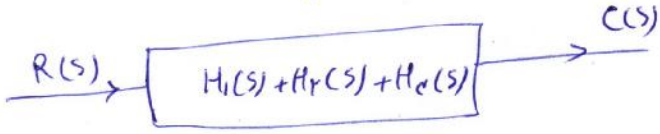
جلسه ۵ - کنترل خطی - جلسه دوم ۸۹،۱۲،۴

ب - سیستم های موازی



$$C(s) = R(s)H_1(s) + R(s)H_2(s) + R(s)H_3(s)$$

$$C(s) = R(s)\underbrace{\left(H_1(s) + H_2(s) + H_3(s)\right)}_{\text{معادل } H(s)}$$

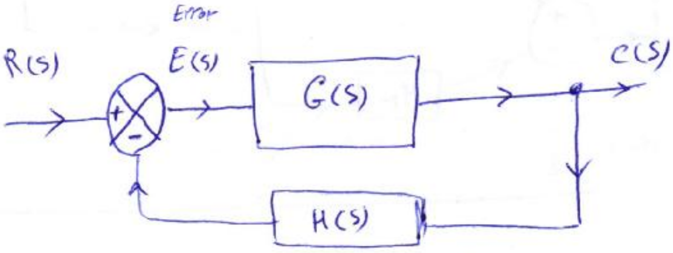


فیدبک: نمونه گیری از خروجی و اعمال به ورودی

فیدبک منفی: افزایش خروجی باعث کاهش ورودی می‌شود.
کاهش خروجی باعث افزایش ورودی می‌شود.

فیدبک مثبت: افزایش خروجی باعث افزایش ورودی می‌شود.
کاهش خروجی باعث کاهش ورودی

فیدبک: اعمال خروجی به ورودی



$$C(s) = E(s) \cdot G(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s)H(s)$$

$$C(s) = \left(R(s) - C(s)H(s)\right)G(s)$$

$$C(s) + C(s)H(s)G(s) = R(s)G(s)$$

ص ۷

9

$$C(s)\left(1+H(s)\,G(s)\right)=R(s)\;G(s)$$

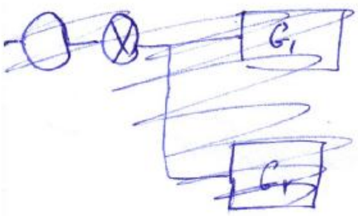
$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+H(s)\,G(s)}$$

forward tranfer function : G

feedback transfer function : H

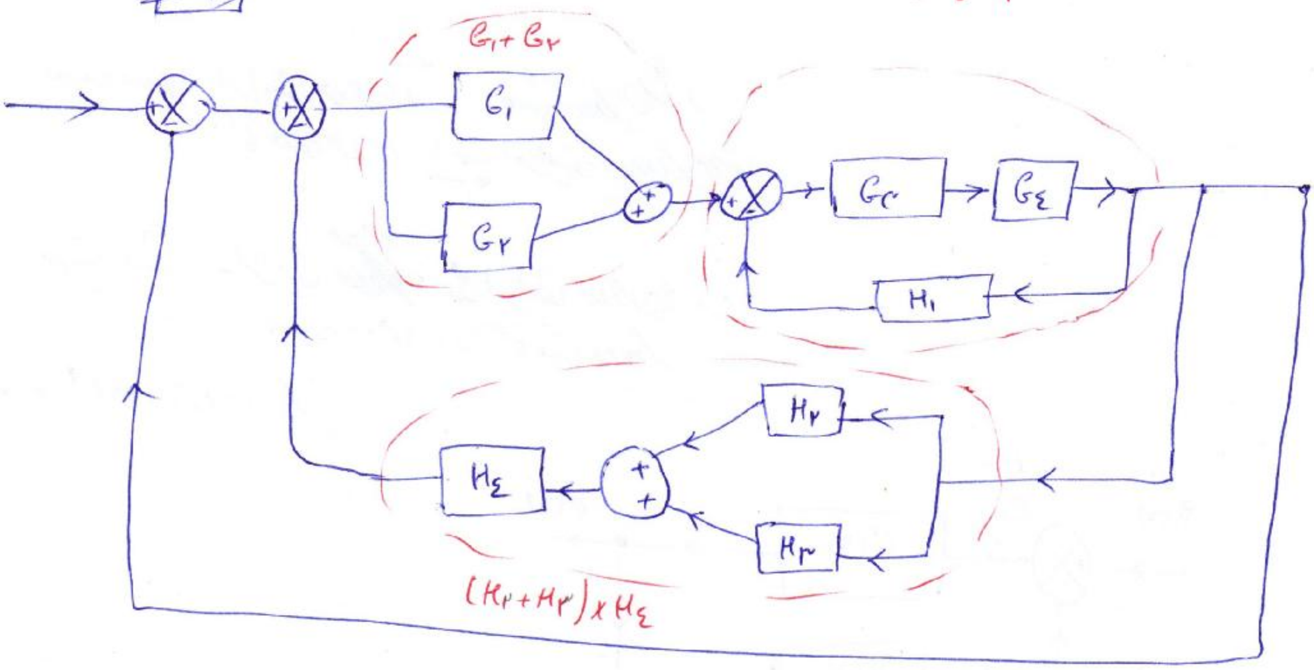
loop transfer function : GH

$$\frac{C}{R}=\frac{\text{forward transfer function}}{1+\text{loop transfer function}}$$



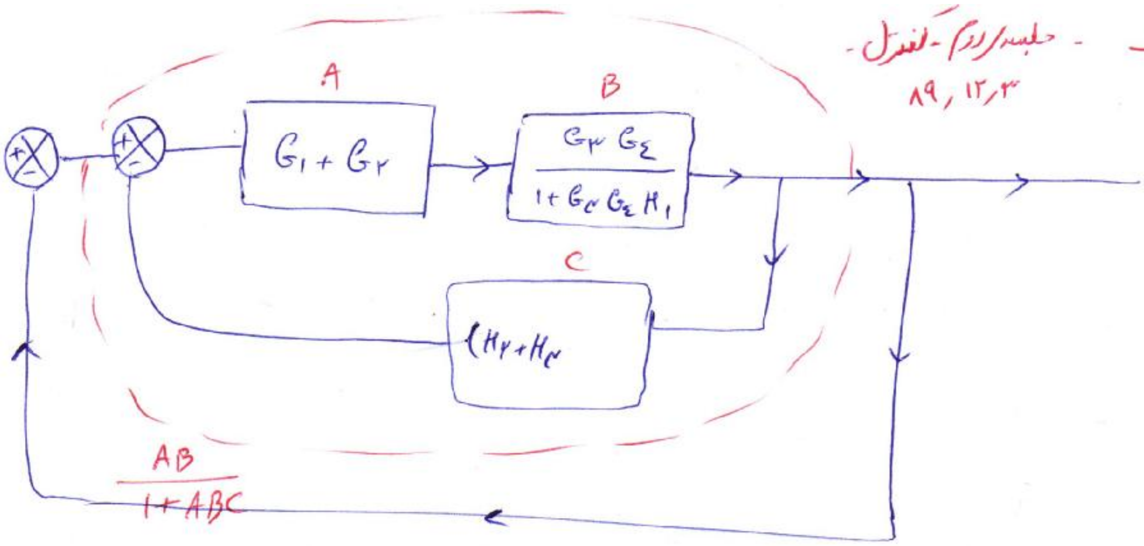
مثال :

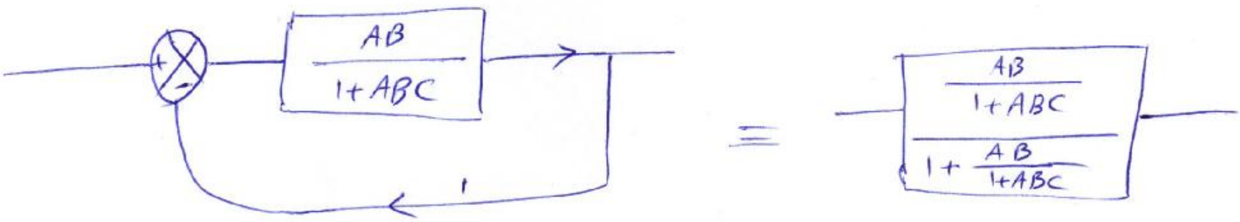
$$\frac{G_3\,G_4}{1+G_3G_4H_1}$$



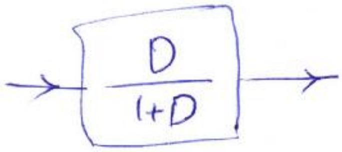
۷

ص ۷ - جلسه دوم - کنترل -
۸۹/۱۲/۳





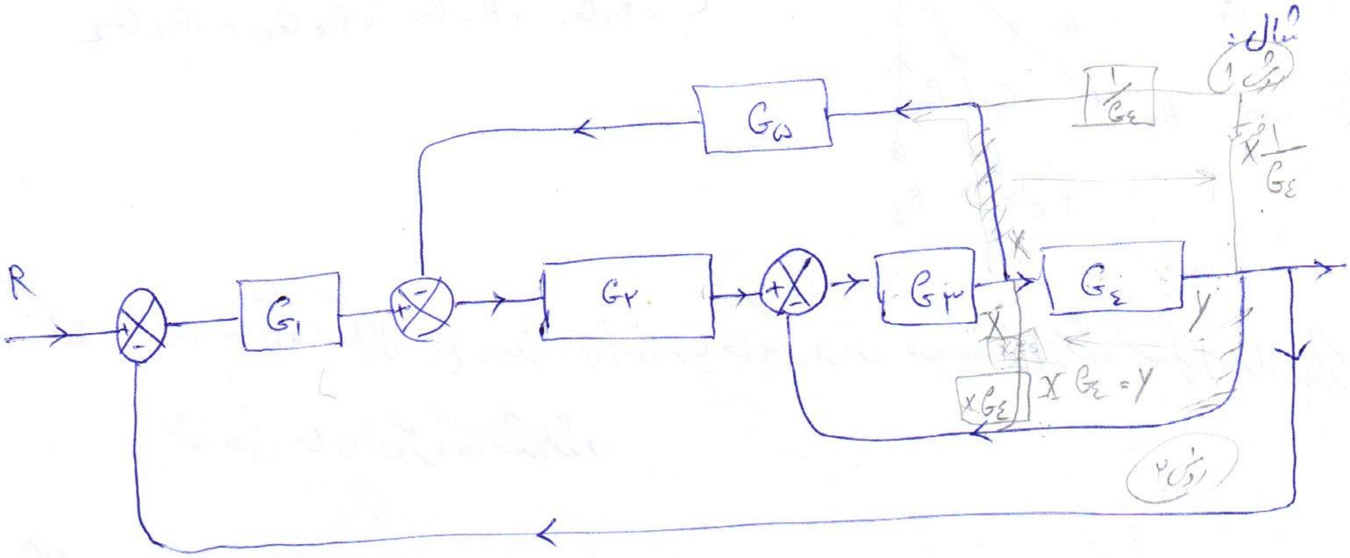
=



«بسمه تعالی»

کنترل - جلسه سوم - ۸، ۱۲، ۸۹

ص ۱



نمودار سیگنال فلوگراف:

نمایش اجزای سیستم با گره‌ها و شاخه‌ها.

شاخه‌ها ← نحوه ارتباط ← تابع انتقال سیستم

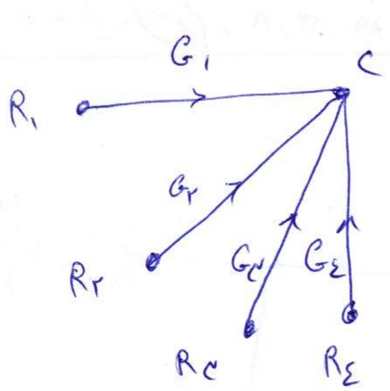
گره‌ها ← کمیت‌ها ← سیگنال

نکته: کمیت یک گره برابر است با مجموع سیگنال‌های وارد بر آن.

$R \times G = C$

$C = RG$

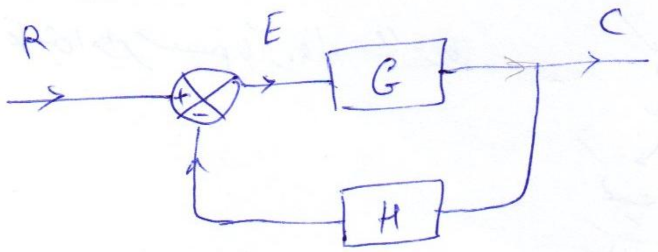
صفحه ۲ نکته:

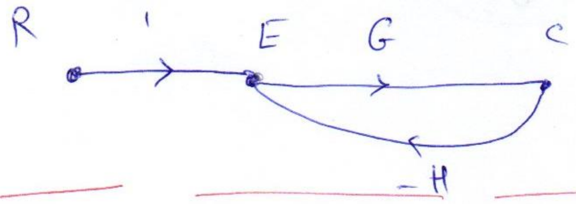


$$C = R_1G_1 + R_2G_2 + R_3G_3 + R_4G_4$$

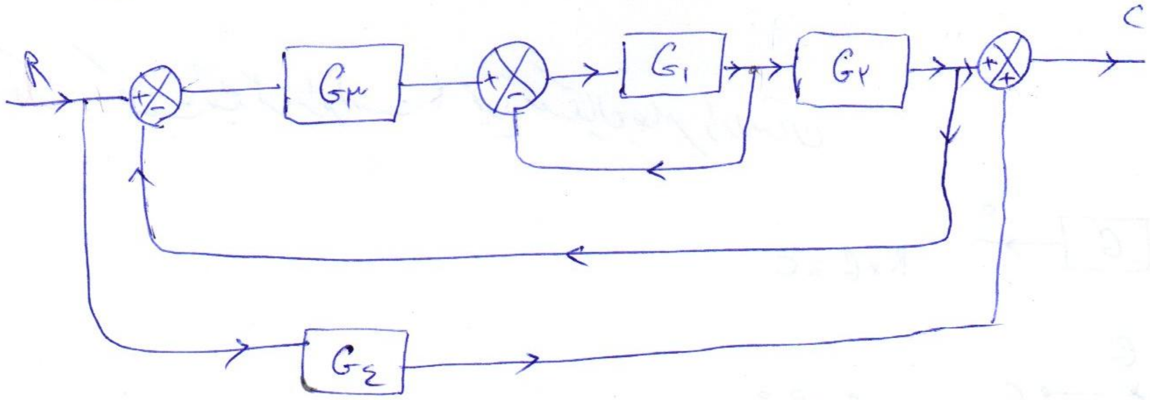
نکته: حتماً جایی که سیگنال جمع و منها انجام شده و یا جایی که از آن فیدبک گرفته شده سیگنال ها در نظر گرفته شود یعنی جای آن گره گذاشته شود.

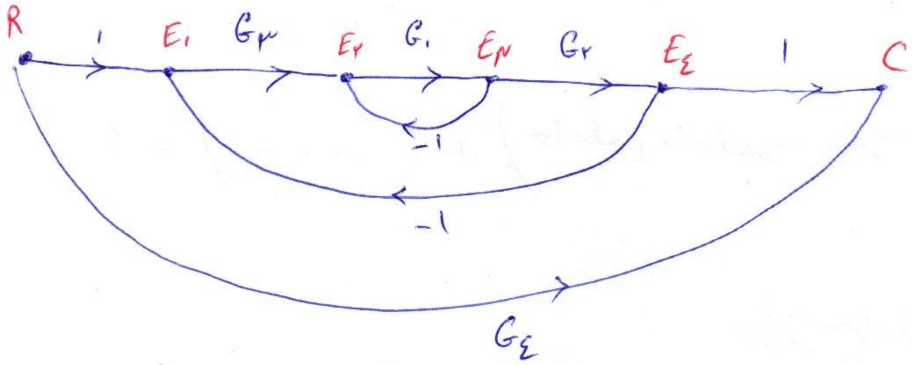
مثال: سیگنال فلوگراف شکل زیر را بدست آورید.





مثال:





تعاریف:

گره مبدأ: گره‌ای که فقط از آن سیگنال خارج می‌شود.

گره مقصد: گره‌ای که به آن سیگنال وارد می‌شود.

گره مختلط: هم خارج می‌شود و هم وارد می‌شود سیگنال به آن

مسیر: توالی پیوستگی از گره‌ها و شاخه‌ها را گویند

مسیر اصلی: مسیری که گره مبدأ را به گره مقصد متصل می‌نماید.

حلقه: مسیر بسته‌ای که از هر گره فقط یک بار عبور کند.

بهره مسیر: حاصلضرب توابع انتقال داخل مسیر (حاصلضرب مقادیر داخل شاخه‌ها)

حلقه‌های مجزا: حلقه‌هایی که هیچ عامل مشترکی چه گره و چه شاخه با هم ندارند.

فرمول میسون:

تابع انتقال نهایی سیستم برابر است با:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_i \Delta_i}{\Delta}$$

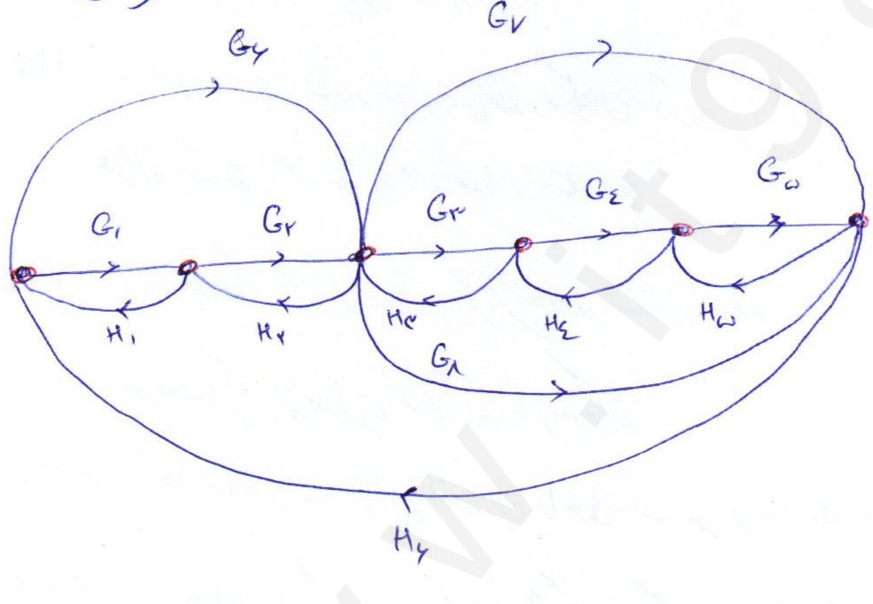
11

Δ = 1 − (حاصلجمع بهره تک حلقه ای ها) + (حاصلجمع حاصلضرب بهره دو حلقه ای های مجزا) − (حاصلجمع حاصلضرب بهره سه حلقه ای های مجزا) + (. . . .) − (. . .)

P_i : بهره مسیر اصلی i ام

Δ_i : همان Δ با حذف مسیر اصلی i ام

m = تعداد مسیرهای اصلی



تک حلقه ای ها:

G_1H_1

G_2H_2

G_3H_3

G_4H_4

G_5H_5

$G_6H_2H_1$

$G_6G_7H_6$

$G_6G_8H_6$

$G_7H_5H_4H_2$

$G_8H_5H_4H_3$

$G_1G_2G_3G_4H_6$

$G_1G_2G_8H_6$

$G_6G_8H_6$

$G_6G_2G_4G_5H_6$

دو حلقه ای مجزا

$G_1H_1 \times G_3H_3$

$G_1H_1 \times G_4H_4$

$G_1H_1 \times G_5H_5$

$G_2H_2 \times G_4H_4$

$G_2H_2 \times G_5H_5$

$G_3H_3 \times G_5H_5$

$G_6H_2H_1 \times G_4H_4$

$G_6H_2H_1 \times G_5H_5$

$G_7H_5H_4H_3 \times G_1H_1$

$G_8H_5H_2H_3 \times G_1H_1$

$G_6G_7H_6 \times G_4H_4$

$G_1G_2G_8H_6 \times G_4H_4$

⋮

ص ۵ - کنترل - ۸۹,۱۲,۸

سه حلقه مجزا :

$$G_1H_1 \times G_3H_3 \times G_5H_5$$

$$\Delta = 1 - (G_1H_1 + G_2H_2 + \dots) + (G_1H_1 + G_2H_2 + \dots) - (G_1H_1\, G_3H_3\, G_5H_5)$$

$$T = \frac{C}{R}$$

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 \qquad \Delta_1 = 1 - (0) = 1$$

$$P_2 = G_6 G_7 \qquad \Delta_2 = 1 - G_4H_4$$

$$P_3 = G_6 G_8 \qquad \Delta_3 = 1 - G_4H_4$$

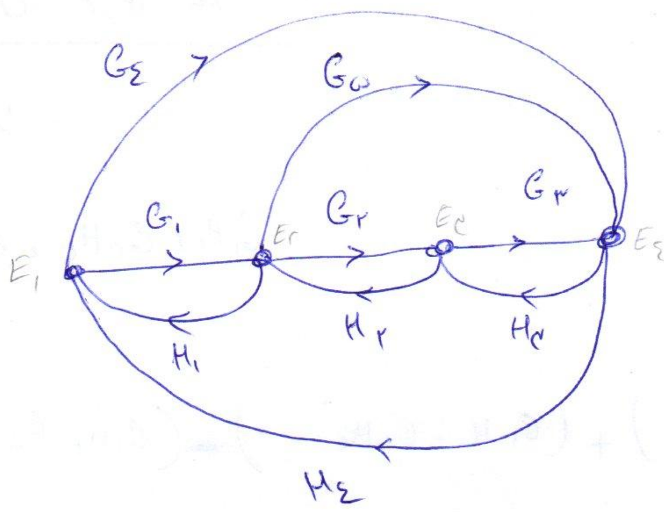
$$P_4 = G_1 G_2 G_8 \qquad \Delta_4 = 1 - G_4H_4$$

$$P_5 = G_1 G_2 G_7 \qquad \Delta_5 = 1 - G_4H_4$$

$$P_6 = G_6 G_3 G_4 G_5 \qquad \Delta_6 = 1 - 0 = 1$$

$$T = \frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + P_4\Delta_4 + P_5\Delta_5 + P_6\Delta_6}{\Delta}$$

۱۳

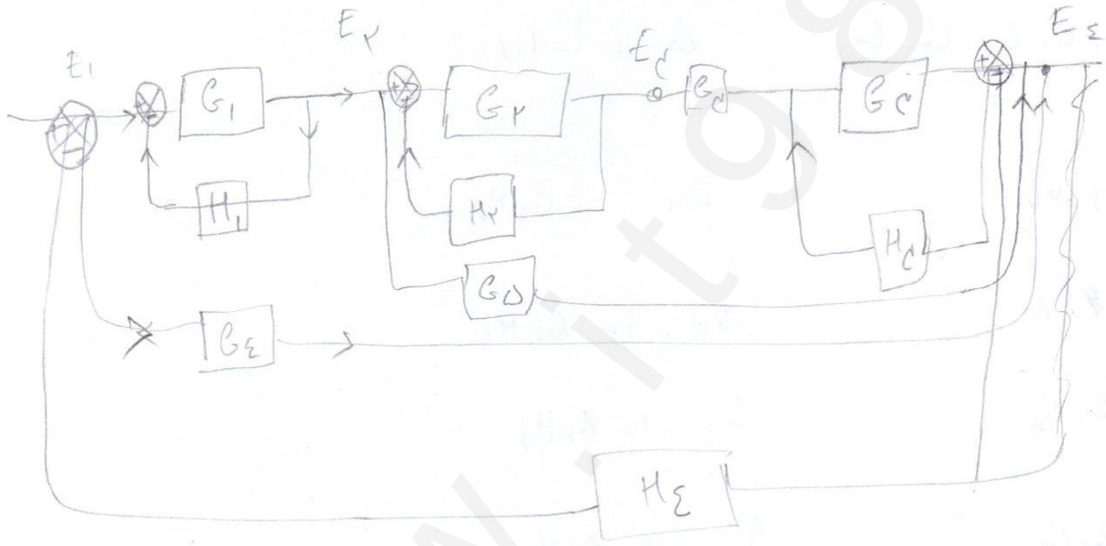


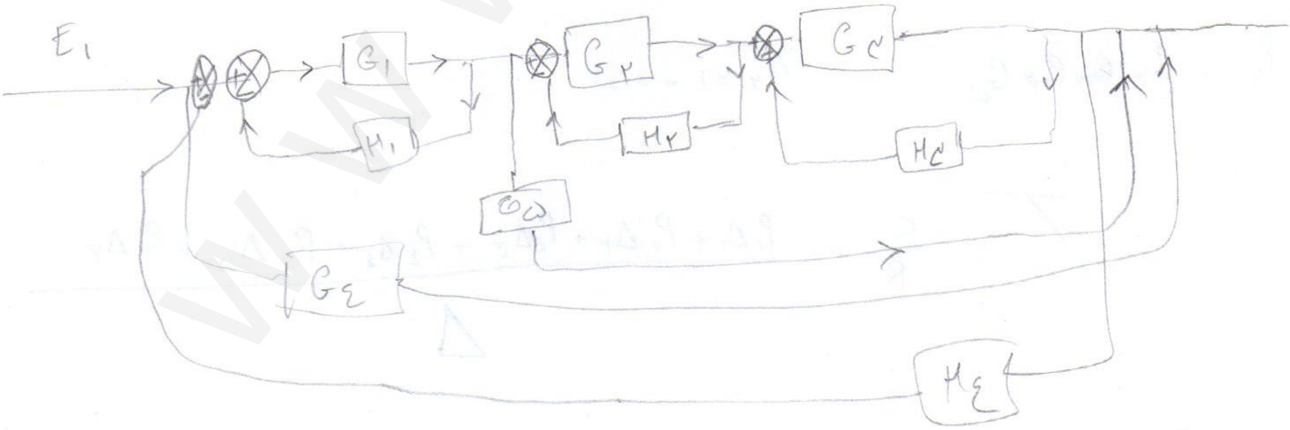
تمرین: خانه

③ ساده کنید.

② بلوک دیاگرام را رسم کنید

① $T, \Delta = ?$

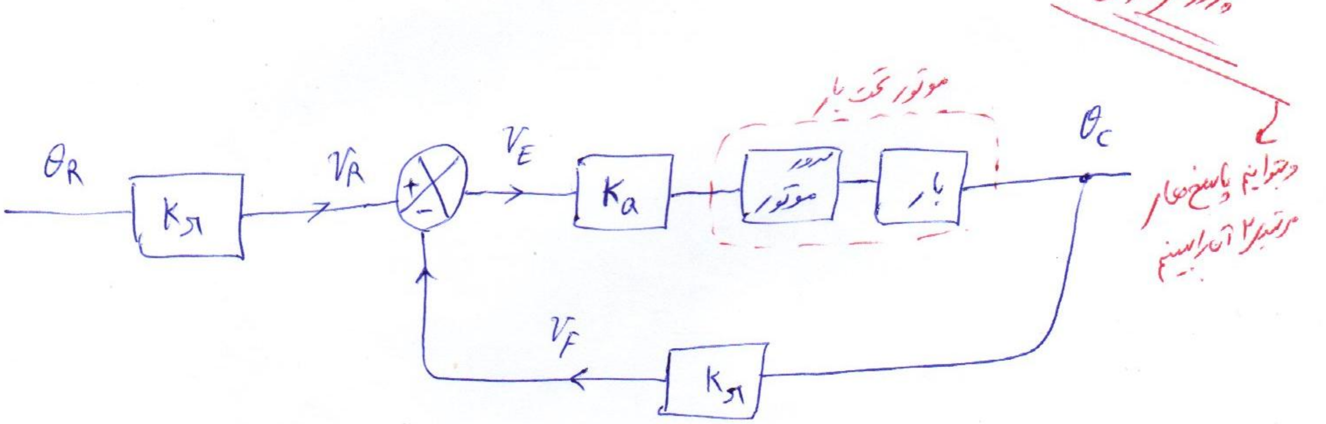




کنترل - ۸۹/۱۲/۸

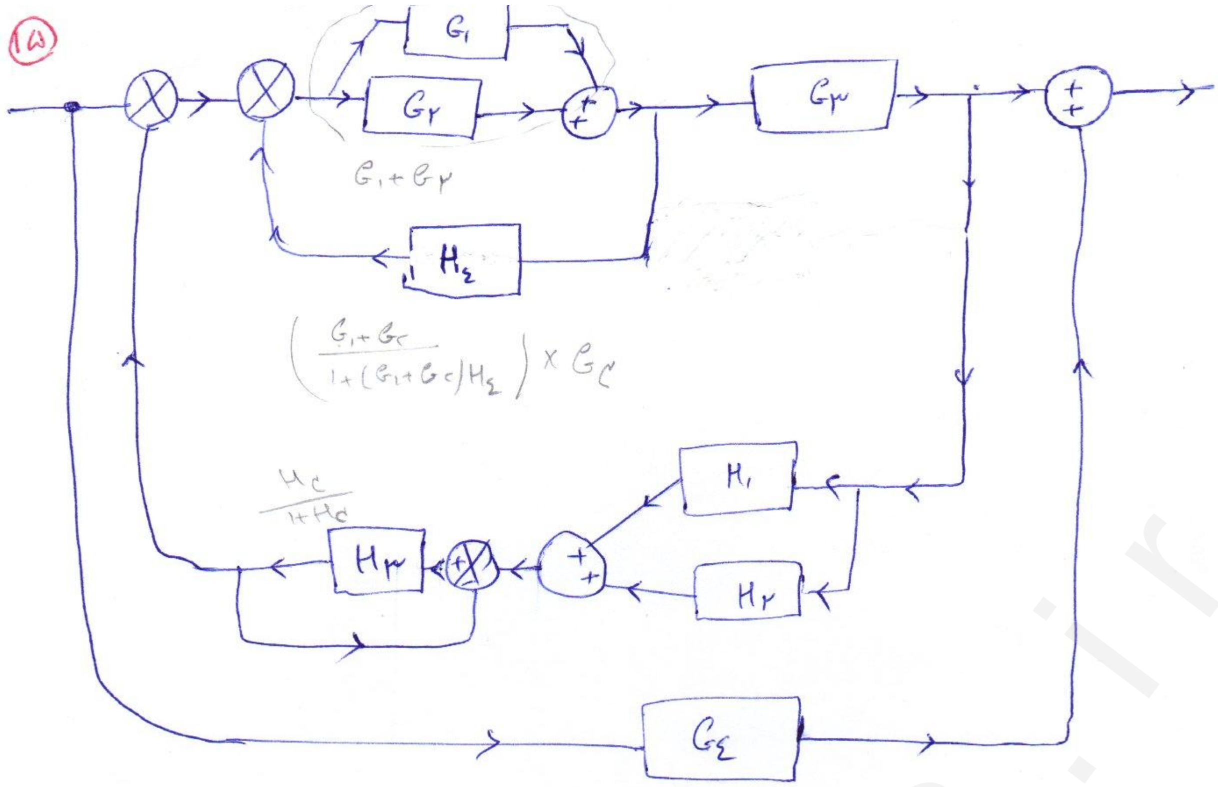
مدل سازی سیستم کنترل وضعیت :

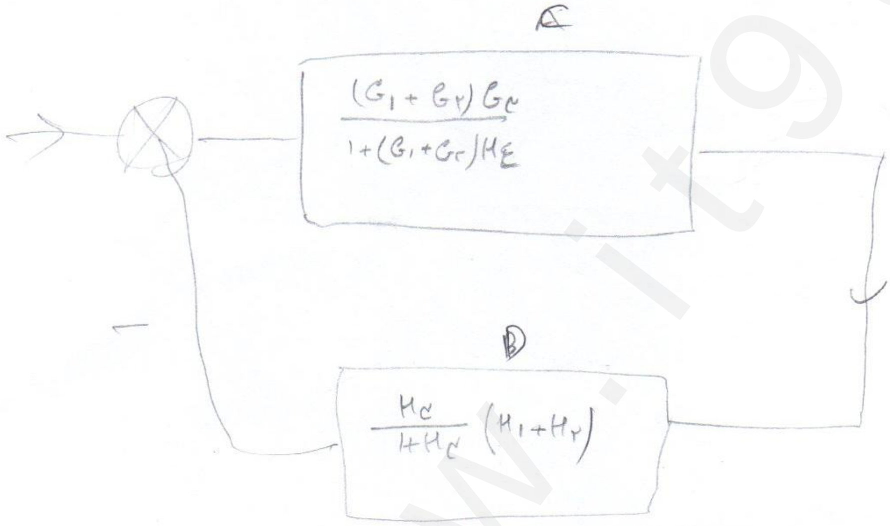
قرار است یک سیستم کنترل وضعیت طراحی شود (آنالوگ) که زاویه بگیرد و زاویه داده شده را روی بار اعمال کند مثلاً زاویه‌ای که بگذاریم روی ۲۰ درجه لوله‌ی توپ یا آنتن با زاویه ۲۰° می‌ایستد.

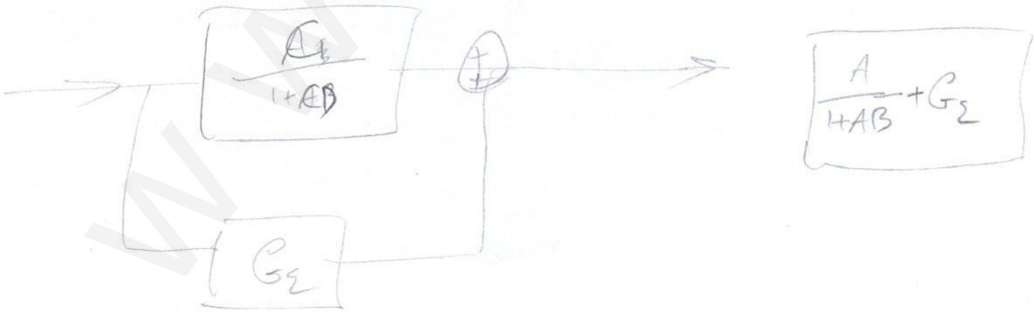


۱۵

ص ۸
ج ۲


G1
G2
G3
G1+G2
H4
$\left(\frac{G_1+G_2}{1+(G_1+G_2)H_4}\right) \times G_3$
H1
H2
H3
$\frac{H_3}{1+H_3}$
G4


A
$\frac{(G_1+G_2)G_3}{1+(G_1+G_2)H_4}$
B
$\frac{H_3}{1+H_3}(H_1+H_2)$

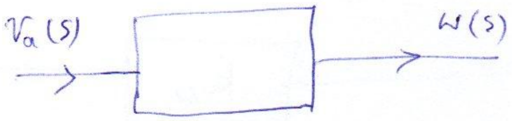

$\frac{A}{1+AB}$
G4
$\frac{A}{1+AB}+G_4$

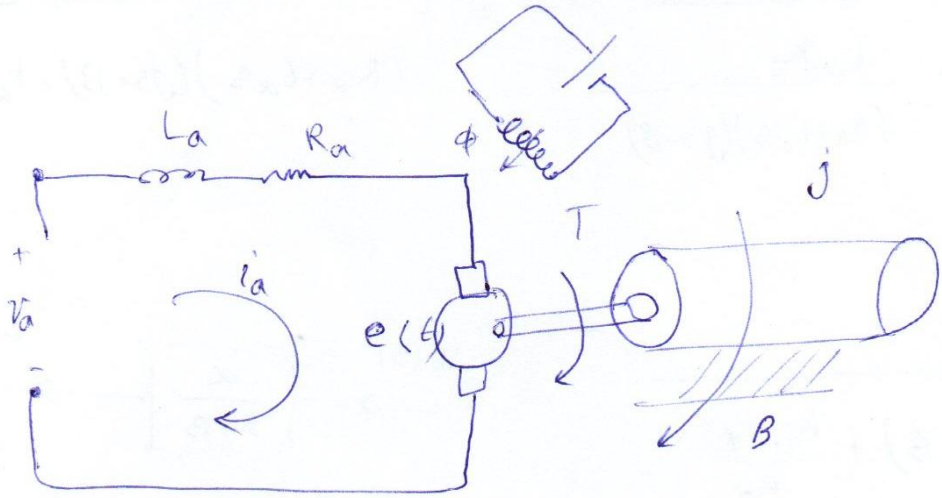
دوشنبه ترمای ۱۱

کنترل

جلسه سوم - ۸۹, ۱۲, ۱۷

ص ۱





$$V_a(t) - e(t) = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a$$

$$T(t) = \underbrace{k\phi}_{k_t} I_a$$

$$e(t) = \underbrace{k\phi}_{k_\omega} \omega(t)$$

$$T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t)$$

تبدیل لاپلاس :

$$V_a(S) - E(S) = L_a S I_a(S) + R_a I_a(S)$$

$$T(S) = k_t I_a(S)$$

$$E_S = k_\omega \omega(S) \longrightarrow T(S) = JS\omega(S) + B\omega(S)$$

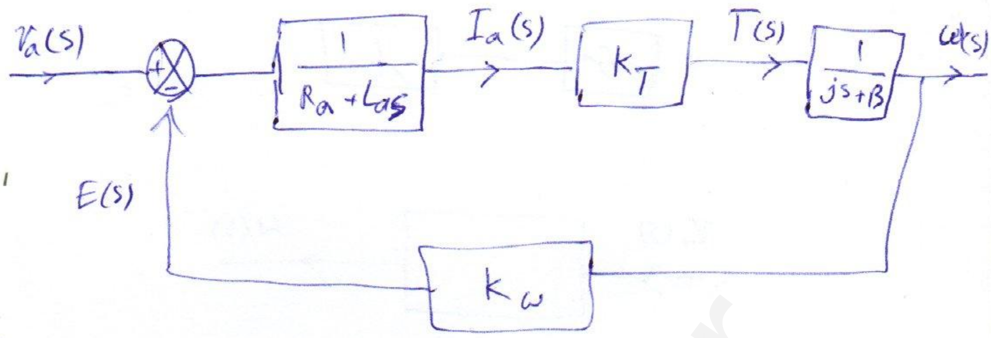
(۱۷) ص ۲

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - E(s)}{R_a + L_a s}$$

$$\omega(s) = \frac{T(s)}{js + B}$$

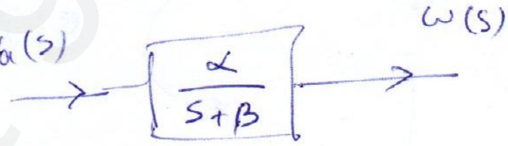
$$T(s) = k_t I_a(s)$$

$$E(s) = k_\omega \omega(s)$$



$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{\dfrac{k_t}{(R_a + L_a s)(js+B)}}{1 + \dfrac{k_\omega k_t}{(R_a + L_a s)(js+B)}} = \frac{k_t}{(R_a + L_a s)(js+B) + k_\omega k_t}$$

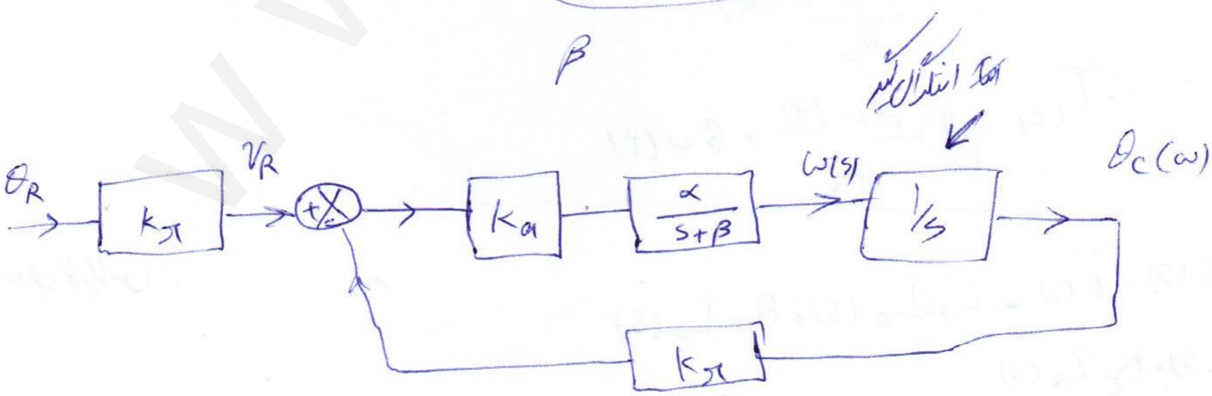
$$\frac{\dfrac{k_t}{R_a}}{\left(1 + \cancel{\dfrac{L_a s}{R_a}}\right)(js+B) + \dfrac{k_\omega k_t}{R_a}}$$



صرفنظر

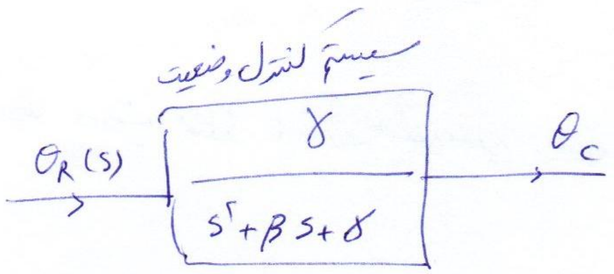
$L_a \ll R_a$

$$= \frac{\dfrac{k_t}{R_a}}{js + B + \dfrac{k_\omega k_t}{R_a}} = \frac{\overbrace{\dfrac{k_t}{R_a j}}^{\alpha}}{s + \underbrace{\dfrac{B}{j} + \dfrac{k_\omega k_t}{R_a j}}_{\beta}} = \frac{\alpha}{s+\beta}$$



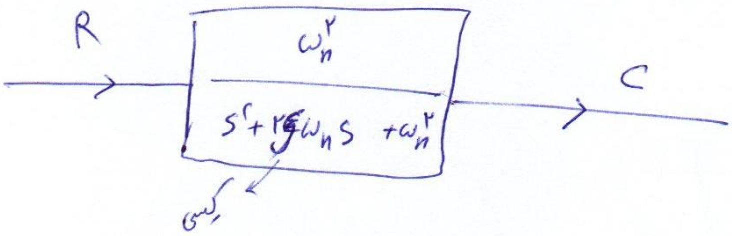
کنترل - ۱۷/۱۲/۸۹ ج۳

$$\frac{\theta_c(s)}{\theta_R(s)} = \frac{\dfrac{k_a\alpha}{s+\beta}\times\dfrac{1}{s}}{1+\dfrac{k_a\alpha k_\pi}{s(s+\beta)}}\times k_\pi = \frac{\overbrace{k_a\alpha k_\pi}^{\gamma}}{s^2+\beta s+\underbrace{\alpha k_a k_\pi}_{\gamma}}$$



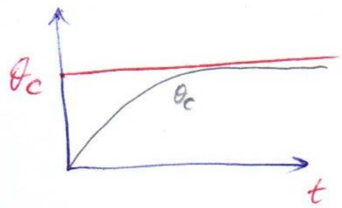
بررسی پاسخ پله مرتبه دوم:

شکل استاندارد یک سیستم مرتبه دوم در کنترل:



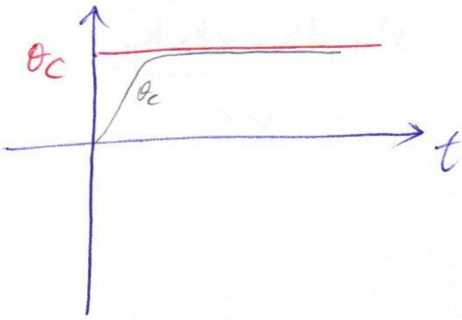
$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0 \qquad s_{1,2}=-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

۱) $\xi>1$ ⇐ دو ریشه حقیقی منفی ⇐ میرایی شدید

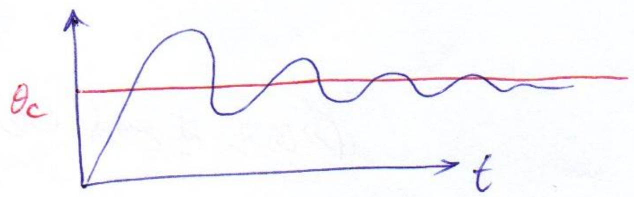


قرمز ← ورودی
آبی (مداد) ← خروجی

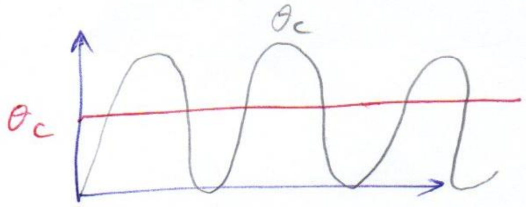
۲) $\xi = 1$ ⇐ دو ریشه حقیقی منفی مضاعف ⇐ میرایی بحرانی



۳) $0 < \xi < 1$ ⇐ دو ریشه مختلط با قسمت حقیقی منفی ⇐ میرایی ضعیف یا نوسانی



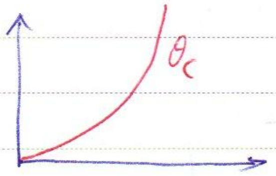
٤) $\xi = 0$ ⇐ دو ریشه کاملاً موهومی (قسمت حقیقی صفر) ⇐ نوسانی کامل



۵) $-1 < \xi < 0$ ⇐ دو ریشه مختلط با قسمت حقیقی مثبت ⇐ نوسان افزاینده

کنترل
ص ۵ – جلسه سوم – ۸۸, ۱۲, ۱۷

۱- ξ ← دو ریشه حقیقی مثبت ← (ناپایدار)



$$T(s) = \frac{s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 2s + 1}{s^5 + 4s^2 + 2s + 3}$$

پاسخ پله

Num = [1 5 3 2 1];

den = [1 0 0 4 2 3]

step (num, den);

تکلیف

$\omega = 10$

$$\xi = 2 \longrightarrow \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{100}{s^2 + \underbrace{4 \times 10}_{40} s + 100}$$

$\xi = 1$

$\xi = 0.5$

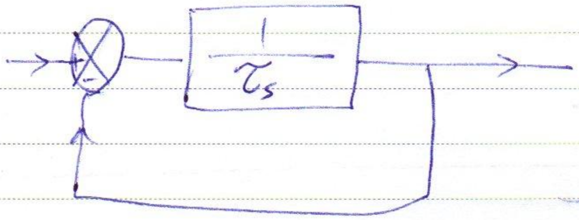
$\xi = 0$

Num = [0 0 1]

den = [1 4 100] ⇒ step(num, den)

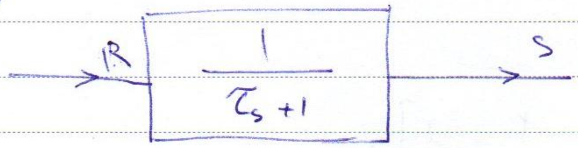
$\xi = -3$

بررسی پاسخ پله سیستم مرتبه اول:



$$\frac{\frac{1}{\tau s}}{\frac{1}{\tau s}+1}=\frac{1}{\tau s+1}$$

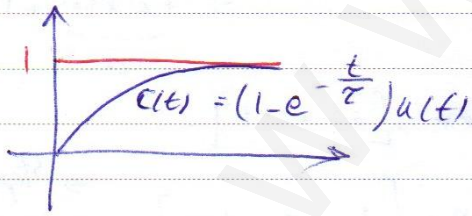
شکل استاندارد مرتبه اول (در کنترل)



$$r(t)=u(t)\longrightarrow R(s)=\frac{1}{s}$$

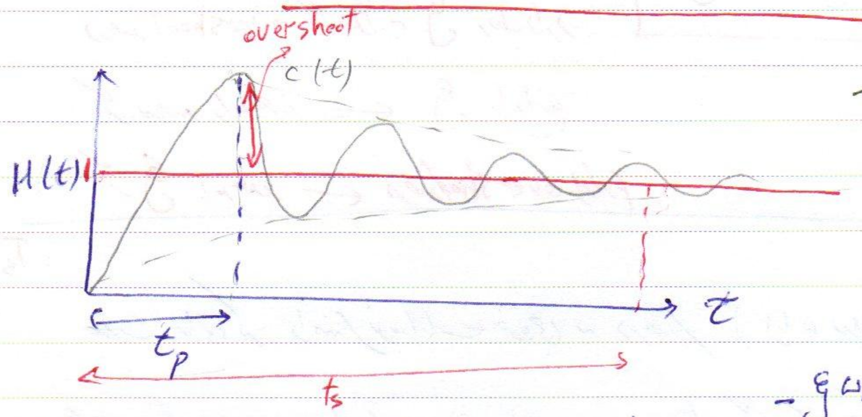
$$C(s)=\frac{1}{s}\times\frac{1}{\tau s+1}=\frac{1}{s}\times\frac{1/\tau}{s+\frac{1}{\tau}}=\frac{\overset{1}{A}}{s}+\frac{\overset{-1}{B}}{s+\frac{1}{\tau}}$$

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\longrightarrow c(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$$



پاسخ پله سیستم مرتبه اول را با یک ح دلخواه در Matlab بررسی کنید.

بررسی پاسخ پله یک سیستم مرتبه دوم در حالت میرای نوسانی :



$$r(t) = u(t) \rightarrow c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \cos^{-1}\xi) \quad t \geq 0$$

$\cos^{-1}\xi$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$t_p = ?$ زمان فراجهش

$$\rightarrow \frac{dc(t)}{dt} = 0 \Rightarrow t = \frac{k\pi}{\omega_d} \qquad \boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_d}}$$

اولین پیک $k=1$

overshoot : درصد مقداری که اولین فراجهش از پاسخ نهایی (ورودی = 1) بالاتر می‌رود : درصد فراجهش

$$c(t_p) = 1 + e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\%\, P.O = \frac{c(t_p) - 1}{1} \times 100 = \frac{1 + e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - 1}{1} \times 100$$

Subject: ۲۳

Year. Month. Date.

$$\boxed{= 100\, e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

درصد overshoot کاملاً به ξ ربط دارد

اگر درصد را بدهند $\leftarrow$ ξ را داریم

اگر ξ را بدهند $\leftarrow$ درصد overshoot را داریم.

T_s:

مدت زمانی که دامنه نوسانات خروجی به درصدی (۲ یا ۵ درصد) از پاسخ نهایی برسد

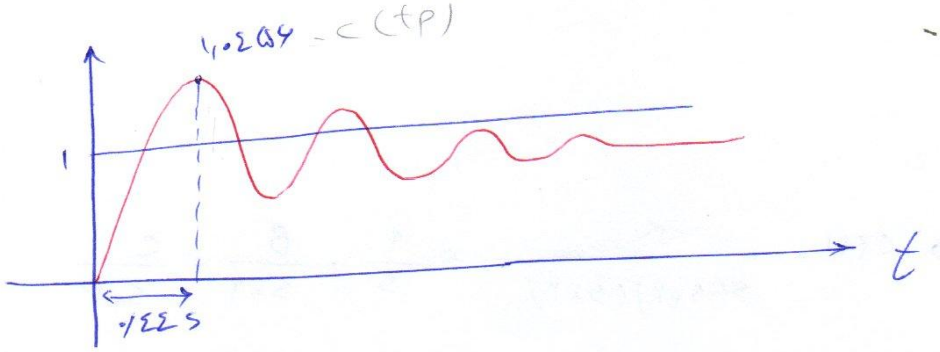
که تقریباً این زمان را مدت زمان رسیدن به پاسخ نهایی در نظر می‌گیریم که باید کم باشد

$$T_s \overset{\%5}{\simeq} \frac{3}{\xi \omega_n}$$

$$T_s \overset{\%2}{\simeq} \frac{4}{\xi \omega_n}$$

کنترل - ۹۰/۱/۱۶ - ج
ص ۱

مثال: پاسخ پله یک سیستم مرتبه دوم بصورت زیر است، تابع انتقال آن را بدست آورید.



$$\%P.O = \frac{1.0456 - 1}{1} \times 100 = 4.56$$

$$4.56 = 100\, e^{\frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Longrightarrow \zeta \simeq 0.7$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \Longrightarrow 0.44 = \frac{\pi}{\omega_d} \rightarrow \omega_d = \frac{\pi}{0.44}$$

$$\underbrace{\omega_d}_{\pi/0.44} = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \Longrightarrow \omega_n \simeq 10$$

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \boxed{\frac{100}{s^2 + 14s + 100}}$$

بدست آوردن پاسخ یک سیستم خطی مرتبه n:

سیستم خطی مرتبه n را می توانیم با استفاده از تجزیه کسرها به یک سری سیستم مرتبه اول و دوم تجزیه کنیم. پاسخ نهایی حاصل جمع تک تک این سیستم ها می باشد.

پایداری BIBO:

ورودی محدود ← خروجی محدود

سیستمی پایدار است که به یک ورودی محدود پاسخ محدود بدهد

۲۵

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{\alpha}{s^2+5s+6}} \longrightarrow C(s)$$

$\boxed{\text{پاسخ پله}}$

ورودی

$R(s)=\frac{1}{s}$

$$C(s)=\frac{\alpha}{s(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3}$$

$$c(t)=\left(A+\underbrace{Be^{-2t}}_{0}+\underbrace{Ce^{-3t}}_{0}\right)u(t)$$

$t\to\infty$

$$\to c(\infty)=A$$

پاسخ به ورودی محدود، محدود بوده است پس سیستم پایدار است.

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{\beta}{s^2+4s-5}} \longrightarrow C(s)$$

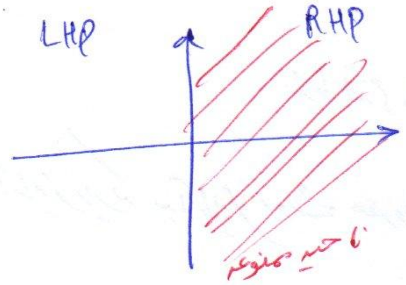
پاسخ پله $\quad C(s)=\frac{1}{s}\times\frac{\beta}{s^2+4s-5}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+5}+\frac{C}{s-1}$

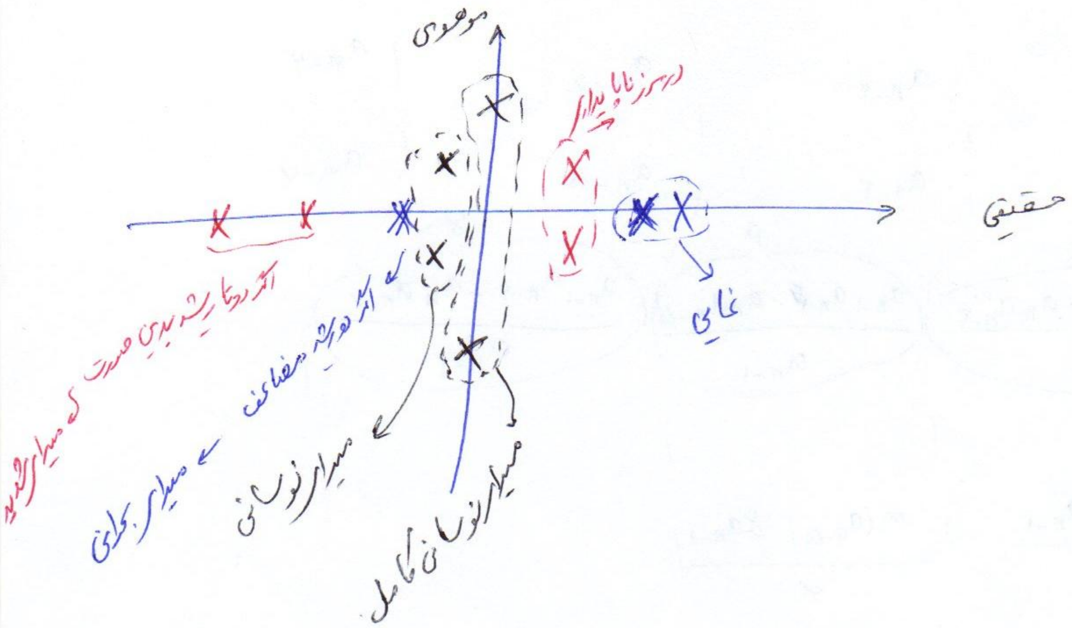
عامل ناپایدار
قطب مثبت (سمت راست)

$$c(t)=\left(A+Be^{-5t}+Ce^{+t}\right)u(t)$$

ناپایدار $\quad t\to\infty \quad \to A+0+\infty=\infty$

عامل ناپایدار وجود قطب مثبت





برای سیستم‌های مرتبه n یکی از راه‌های تجزیه سیستم بررسی وجود یا عدم وجود قطب مثبت برای بررسی ناپایداری سیستم می‌باشد.

معیار پایداری روث:

سیستم با معادله مشخصه $T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$ هنگامی پایدار است که در معادله مشخصه

$$R(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0 = 0$$

الف) شرط لازم: تمامی ضرایب موجود و مثبت باشند (منفی نباشد)

مثال/ $R(s)=s^4+2s^2+3s+5$ → ناپایدار چون ضریب s^3 موجود نیست

$R(s)=s^4+5s^3+2s^2-s+1$ → ناپایدار چون ضریب منفی دارد

$$R(s) = s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 4s + 1$$

شرط لازم را دارد و شرط کافی باید بررسی شود

شرط کافی: در آرایه زیر که به آرایه روث معروف است در ستون اول تغییر علامتی مشاهده ننماییم

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}
s^{n-2}	$\alpha = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$\beta = \dfrac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$\gamma = \dfrac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$	
$\vdots$				
s^{n-3}	$\dfrac{\alpha a_{n-3} - \beta a_{n-1}}{\alpha}$	$\dfrac{\alpha (a_{n-5}) - \gamma a_{n-1}}{\alpha}$		
$\vdots$				

نکته: به تعداد تغییر علامت در ستون اول آرایه روث، ریشه مثبت (قطب مثبت) داریم

مثال:

$$R(s) = s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 3$$

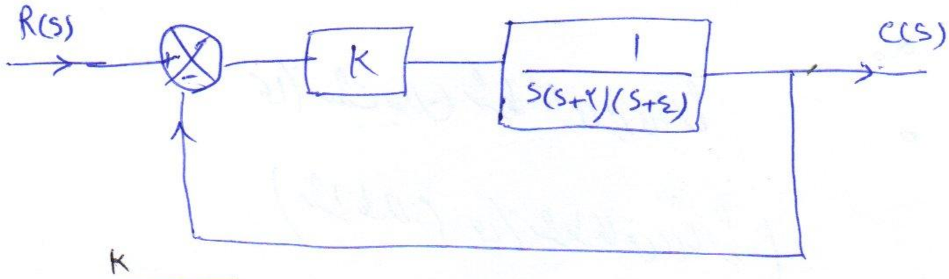
s^4	1	5	3
s^3	3	2	0
s^2	$\dfrac{15-2}{3} = \dfrac{13}{3}$ ①	$\dfrac{9-0}{3} = 3$	0
s^1	$\dfrac{\frac{13}{3} \times 2 - 9}{\frac{13}{3}} = -\dfrac{1}{13}$ ②	0	
s^0	3	0	0

ناپایدار چون دو بار تغییر علامت در ستون اول داریم و پس ۲ قطب مثبت داریم.

کنترل - ۹۰/۱/۱۶ - ج

صفحه ۵

مثال، در سیستم شکل زیر محدوده‌ی k را برای پایداری سیستم بدست آورید.



$$T(s) = \frac{\frac{K}{s(s+2)(s+4)}}{1+\frac{K}{s(s+2)(s+4)}} = \frac{K}{s^3+6s^2+8s+K}$$

$$\underset{\text{مخرج}}{den(s)} = 0 \longrightarrow s^3+6s^2+8s+K=0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 8 \\ s^2 & 6 & K \\ s^1 & \frac{48-K}{6} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

$$\frac{48-K}{6} > 0 \rightarrow 48 > K$$

$$K > 0$$

$$0 < K < 48$$

تکلیف: تابع انتقال بالا را با $K>48$ و $K<0$ و $K=48$ و $48 < K < 48$

شرایط پایداری سیستم مرتبه‌ی سه را بدست آورید.

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & \frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_2} & 0 \\ s^0 & a_0 & \end{array}$$

$$a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0$$

شرط لازم: تمامی ضرایب موجود و مثبت

$$a_2 a_1 > a_0 a_3$$

شرط کافی: دور در دور > نزدیک در نزدیک

مثال: شرایط پایداری سیستم درجه دوم را بدست آورید.

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

s^2	a_2	a_0
s^1	a_1	0
s^0	a_0	

تمام مثبت بودن شرط کافی نیز می باشد

(شرایط لازم همان شرط کافی می باشد.)

حالت خاص اول:

اگر در ستون اول آرایه روث به صفر برخورد کنیم و در سطر مربوط به آن صفر، عنصر غیر صفر موجود باشد صفر را $\varepsilon>0$ فرض کرده (0^+) و آرایه روث را ادامه می دهیم

مثال:

$$s^4+2s^3+s^2+2s+3=0$$

s^4	1	1	3
s^3	2	2	0
s^2	ε	3	0
s^1	$\frac{2\varepsilon-6}{\varepsilon}$; $2-\frac{6}{\varepsilon}<0$	0	0
s^0	3	0	0

ناپایدار و دو قطب مثبت دارد

حالت خاص دوم:

اگر در آرایه روث یک سطر کاملاً صفر گردد در این حالت معادله مشخصه دارای ریشه های خاصی است، (و لزوماً روی محور [illegible]) که می توان این ریشه ها را از معادله کمکی بالای سطر صفر شده بدست آورد

$$s^3+5s^2+6s+30=0$$

s^3	1	6
s^2	5	30
s^1	0	0
s^0		

معادله کمکی $5s^2+30=0$

$s^2=-6$

$s=\pm j\sqrt{6}$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{s^3}+5s^2+6s+30 & s^2+6 \\ \cline{2-2} \underline{\cancel{s^3}+6s} & s+5 \\ 5s^2+30 & \\ \underline{5s^2+30} & \\ 0\quad 0 & \end{array}$$

$$(s+5)(s^2+6)$$

$$s=-5$$

راه دوم: از معادله کمکی مشتق می‌گیریم و ضرایب مشتق را جای سطر صفر قرار داده و آرایه روث را ادامه می‌دهیم

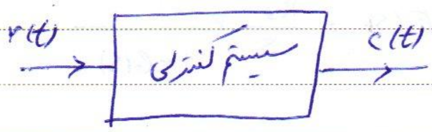
1	6
5	30
10	0

$5s^2+30=0$

مشتق $10s+0=0$

کنترل - ۲۴/۱/۹۰ - ج۱

خطای ماندگار سیستم کنترلی: اختلاف بین ورودی و خروجی در حالت ماندگار



$$e(t) = r(t) - c(t)$$

خطای ماندگار $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$

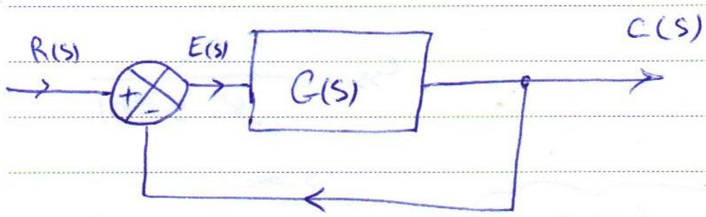
در حوزه لاپلاس:

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s)$$ (قضیه مقدار نهایی)

خطای ماندگار

بررسی خطای ماندگار برای یک سیستم با فیدبک منفی واحد



* در اینجا سیگنال خطا $E(s)$ و خطای واقعی با هم برابر هستند.

$$E(s) = R(s) - \frac{R(s)G(s)}{1+G(s)} = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱) خطا به ورودی پله:

ورودی $R_0 u(t) \longrightarrow \frac{R_0}{s}$ $\qquad E(s) = \frac{R_0}{s} \times \frac{1}{1+G(s)}$

$$e_{ss} \underset{s\to 0}{\overset{\lim}{=}} sE(s) = \frac{R_0}{1 + \lim\limits_{s\to 0} G(s)}$$

ورودی $R_0 u(t) \longrightarrow e_{ss} = \frac{R_0}{1 + \lim\limits_{s\to 0} G(s)}$

۲ـ خطای به ورودی شیب:

ورودی $R_0 t u(t) \longrightarrow \frac{R_0}{s^2}$

$$E(s) = \frac{R_0}{s^2} \times \frac{1}{1+G(s)} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \times \frac{R_0}{s^2} \times \frac{1}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{R_0}{\cancel{s} + sG(s)}$$

ورودی $R_0 t u(t) \longrightarrow e_{ss} \overset{\lim}{=} \frac{R_0}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)}$

کنترل - ۹۰/۲/۲۳
جلسه ۳

۳- خطا به ورودی شتاب:

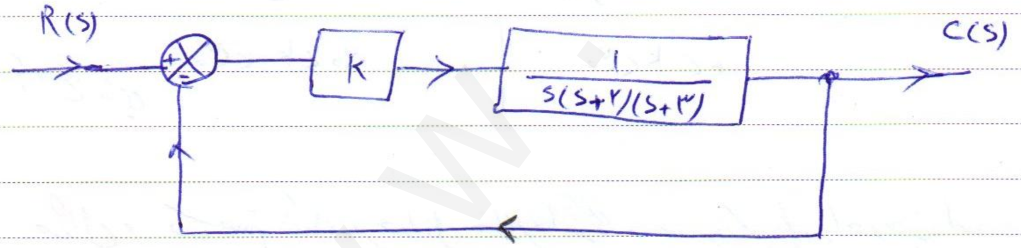
$$\frac{R_0}{2} t^2 u(t) \xrightarrow{\text{لاپلاس}} \frac{R_0}{s^3}$$

$$E(s) = \frac{R_0}{s^3} \times \frac{1}{1+G(s)} \qquad e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \times \frac{R_0}{s^3} \times \frac{1}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{R_0}{s^2 + s^2 G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{R_0}{s^2 G(s)}$$

$$\text{ورودی} \quad \frac{R_0}{2} t^2 u(t) \longrightarrow e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{R_0}{s^2 G(s)}$$

مثال: در سیستم شکل زیر محدوده‌ی K برای آنکه خطا به ورودی ~~پله~~ شیب واحد کمتر از ۰/۳ شود



$$\frac{K}{s(s+2)(s+3)}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\dfrac{K}{s(s+2)(s+3)}}{1+\dfrac{K}{s(s+2)(s+3)}} = \frac{K}{s(s+2)(s+3)+K}$$

$$s^3 + 5s^2 + 6s + K = 0$$

$$K > 0$$

$$30 > K$$

محدوده پایداری $\quad 0 < K < 30$

s^3	1	6
s^2	5	K
s^1	$\dfrac{30-K}{5}$	0
s^0	K	

$$e_{ss} = \frac{1}{s\left(\dfrac{K}{s(s+2)(s+3)}\right)}$$

$$s \to 0$$

$$K > 0$$

$$\frac{30-K}{5} > 0$$

$$30 - K > 0$$

$$0 < K < 30$$

$$e_{ss} = \frac{6}{K} < 0.3$$

$$K > \frac{6}{0.3} = 20$$

$$20 < K < 30$$ پاسخ نهایی

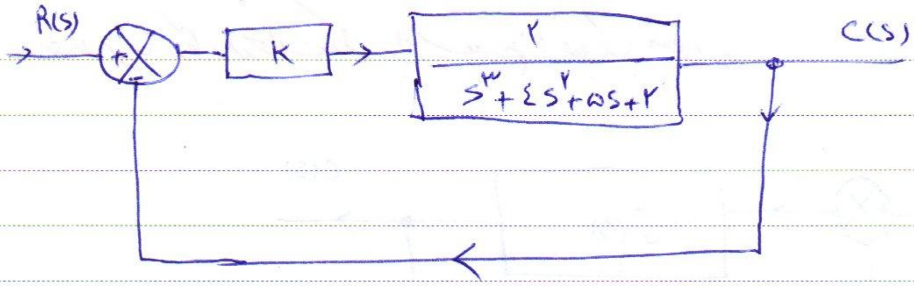
مثال: در سیستم شکل زیر حداقل خطای ماندگار به ورودی پله واحد چقدر است.

Subject: ۳۵

Year. Month. Date. ( )

کنترل - ۹۰/۱/۲۳

ص ۵



$$\frac{\dfrac{2K}{s^3+4s^2+5s+2}}{1+\dfrac{2K}{s^3+4s^2+5s+2}} = \frac{2K}{s^3+4s^2+5s+2K+2}$$

$$1+G(s)H(s) = s^3+4s^2+5s+2K+2$$

$$2K+2>0$$

$$20 > 2K+2 \Rightarrow \begin{cases} K<9 \\ K>-1 \end{cases} \qquad \boxed{K>-1}$$

محدوده پایداری

s^3	1	5
s^2	4	$2K+2$
s^1	$\cancel{\frac{30-K}{5}}$	0
s^0	K	

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\dfrac{2K}{s^3+4s^2+5s+2}} =$$

برای حداقل خطا باید K حداکثر شود و سیستم پایدار بماند.

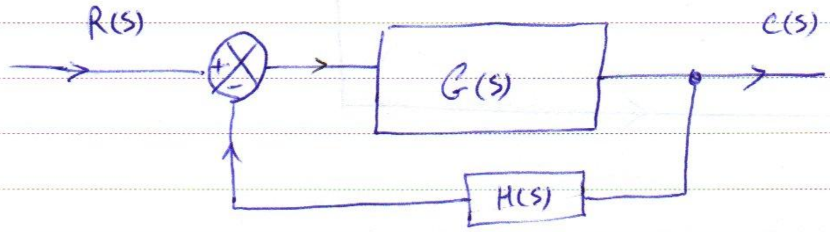
$$\frac{1}{1+K} \qquad K \simeq 9 \;(8.999)$$

$$e_{ss} \simeq 0.1$$

کوچکترین خطا

P4PCO

خطای ماندگار در حالت کلی برای سیستم با فیدبک منفی:



خطای واقعی $E(s) = R(s) - C(s)$

سیگنال خطا $E(s) = R(s) - C(s)H(s)$

در اینجا سیگنال خطا و خطای واقعی با هم برابر نیستند.

الف) سیگنال خطا در حالت ماندگار:

$$E = R - CH$$

$$E = R - \frac{RGH}{1+GH}$$

$$E = \frac{R}{1+GH}$$

ورودی پله:

$$R_0 u(t) \longrightarrow e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{R_0}{1 + G(s)H(s)}$$

ورودی شیب:

$$R_0 t u(t) \longrightarrow e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{R_0}{sG(s)H(s)}$$

$$\frac{R_0 t^2 u(t)}{2} \longrightarrow e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{R_0}{s^2 G(s) H(s)}$$

ب) خطای واقعی در حالت کلی برای سیستم با فیدبک منفی :

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$E(s) = R(s) - R(s)\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$E = R - \frac{RG}{1+GH} = \frac{R + RGH - RG}{1+GH} = \frac{R(1+GH-G)}{1+GH}$$

$$E = \frac{R(1+G(H-1))}{1+GH}$$

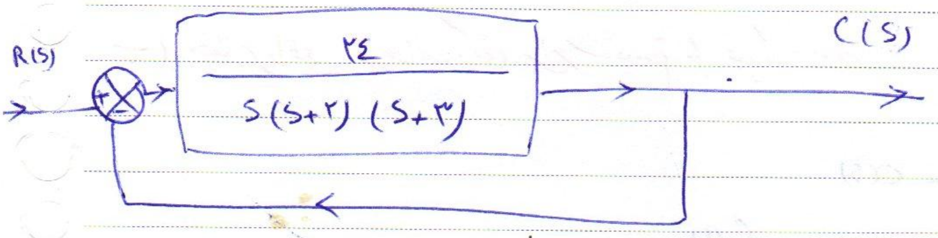
برای ورودی پله $\quad e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \times \frac{R_0}{s} \times \frac{1+G(H-1)}{1+GH} = \lim_{s \to 0} R_0 \times \frac{1+G(H-1)}{1+GH}$

برای ورودی شیب $\quad e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \times \frac{R_0}{s^2} \times \frac{1+G(H-1)}{1+GH} = \lim_{s \to 0} \frac{R_0}{s} \times \frac{(1+G(H-1))}{1+GH}$

برای ورودی شتاب $\quad e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \times \frac{R_0}{s^3} \times \frac{1+G(H-1)}{1+GH} = \lim_{s \to 0} \frac{R_0}{s^2} \times \frac{1+G(H-1)}{1+GH}$

مثال:

در سیستم شکل زیر خطای ماندگار به ورودی ۱- پله واحد
۲- شیب واحد
۳- شتاب واحد



به ورودی پله واحد $= \dfrac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{24}{s(s+2)(s+3)}} = \dfrac{1}{1+\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

به ورودی شیب واحد $= \dfrac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{24}{s(s+2)(s+3)}} = \dfrac{1}{4}$

به ورودی شتاب $= e_{ss} = \dfrac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2\dfrac{24}{s(s+2)(s+3)}} = \infty$

پاسخ خطا Matlab رسم شود
help: چند جمله‌ای

نوع سیستم:

$G(s) = \dfrac{P(s)}{s^n Q(s)}$ نوع سیستم

$G(s) = \dfrac{4}{s^3+3s^2+s+1}$ مرتبه ۳ نوع ۰

$\dfrac{5}{s^4+s^2}$ نوع ۲ مرتبه ۳

$\dfrac{4}{s(s+4)}$ مرتبه ۲ نوع ۱

ورودی	تبدیل لاپلاس	نوع سیستم $n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$R_0 u(t)$	$\frac{R_0}{s}$	$\frac{R_0}{1+\lim_{s\to 0} G(s)}$	0	0	0
$R_0 t u(t)$	$\frac{R_0}{s^2}$	∞	$\lim_{s\to 0} \frac{R_0}{s G(s)}$	0	0
$\frac{R_0}{2} t^2 u(t)$	$\frac{R_0}{s^3}$	∞	∞	$\lim_{s\to 0} \frac{R_0}{s^2 G(s)}$	0
$\frac{R_0}{6} t^3 u(t)$	$\frac{R_0}{s^4}$	∞	∞	∞	$\lim_{s\to 0} \frac{R_0}{s^3 G(s)}$

نتیجه اخلاقی جدول:

اگر نوع سیستم بیشتر از مرتبه ورودی باشد (توان t) خطا صفر می‌شود

اگر نوع سیستم با مرتبه ورودی یکسان باشد یک خطای محدود داریم

اگر نوع سیستم کمتر از مرتبه ورودی باشد خطا بی نهایت می‌شود.

سیستم نوع n حداکثر تا ورودی مرتبه n را می‌پذیرد (دنبال می‌کند)

مثال: تابع انتقال نهایی یک سیستم با فیدبک منفی واحد بصورت زیر است. خطای ماندگار به ورودی زیر را بدست آورید.

$$T(s) = \frac{4(s+1)}{s^3+2s^2+4s+4}$$

$$r(t) = \left(3 - t + \frac{t^2}{4}\right)u(t)$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$G(s) = \frac{T(s)}{1-T(s)} = \frac{4(s+1)}{s^2(s+2)}$$

نوع ۲

خطا به $\frac{t^2}{4}u(t)$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1/2}{s^2 \cdot \frac{4(s+1)}{s^2(s+2)}} = \frac{1}{4}$$

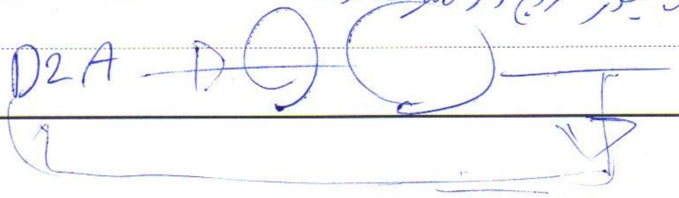
$$r(t) = \left(\cancel{3} - \cancel{t} + \frac{t^2}{4}\right)u(t)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{t^2}{4}\right)u(t)$$

R_0

تفریق کنترل با امید

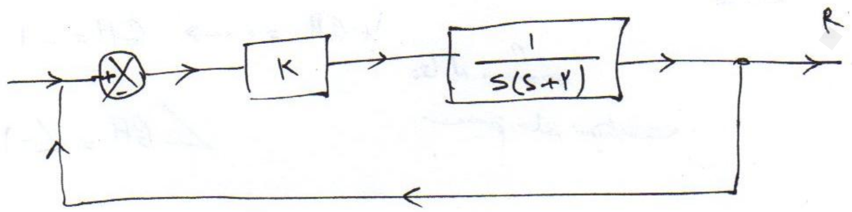
درایور ترانزیستور زوج دارلینگتون



مکان هندسی ریشه های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته وقتی که K (گین حلقه باز) از صفر تا بی نهایت تغییر می کند

می خواهیم ببینیم قطب های سیستم حلقه بسته به ازای تغییرات K کجا قرار می گیرد و با دانستن مکان قطب ها، K مناسب برای کاربرد مورد نظر را انتخاب کنیم.

مثال:



$$T(s) = \frac{\frac{K}{s(s+2)}}{1+\frac{K}{s(s+2)}} = \frac{K}{s^2+2s+K}$$

$s^2+2s+K=0$ معادله مشخصه سیستم حلقه بسته

$s^2+2s+K=0 \qquad s=-1\pm\sqrt{1-K}$

$K=0 \to -2,\ 0$

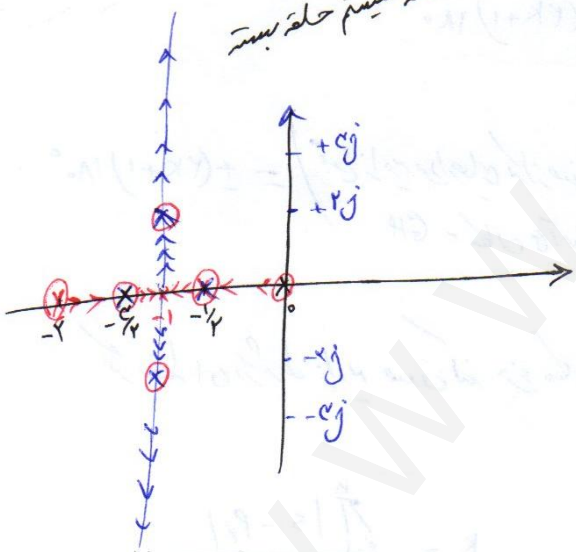
$K=\frac{3}{4} \to s_1=-\frac{1}{2},\ s_2=-\frac{3}{2}$

$K=1 \to s_1=-1,\ s_2=-1$

$K=5 \to s_1=-1+2j,\ s_2=-1-2j$

$K=10 \to s_1=-1+3j,\ s_2=-1-3j$

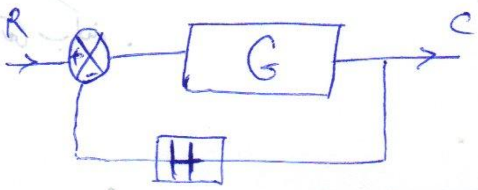
$K=\infty \to s_1=-1+j\infty,\ s_2=-1-j\infty$



این سیستم به ازای همه مقادیر K پایدار است چون تمام قطب های آن سمت چپ است.

رسم مکان هندسی ریشه های معادله مشخصه با استفاده از روش سعی و خطا (ایوانز):

در این روش به دنبال مکان هندسی نقاطی از صفحه S هستیم که بتواند در معادله مشخصه صدق کند، برای این منظور شرط زاویه به صورت زیر برقرار باشد.



$$T = \frac{G}{1+GH}$$

$1+GH=0 \longrightarrow GH=-1$

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته است.

$\angle GH = \angle -1$

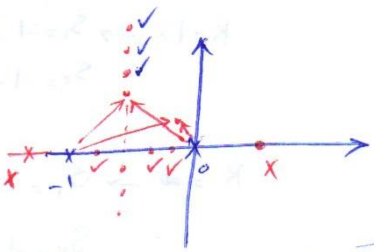
$$GH = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s+p_2)\cdots(s-p_n)} \qquad m<n$$

$\angle GH = \angle -1$

$$\sum_{i=1}^{n} \angle (s-p_i) - \sum_{j=1}^{m} \angle (s-z_j) = \pm(2K+1)180^\circ$$

(مجموع زوایه بردارهایی که از قطب های GH به مکان می آیند) − (مجموع زاویه بردارهایی که از صفرهای GH به مکان می آیند) $= \pm(2K+1)180^\circ$

اگر نقطه ای در شرط زاویه صدق کند جزء مکان است.



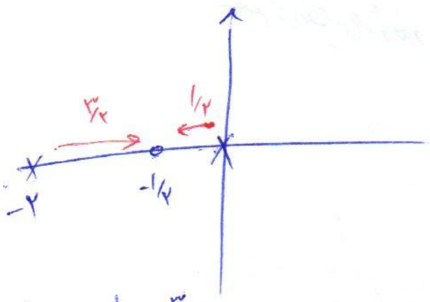
$|GH| = \underbrace{|-1|}_{1}$

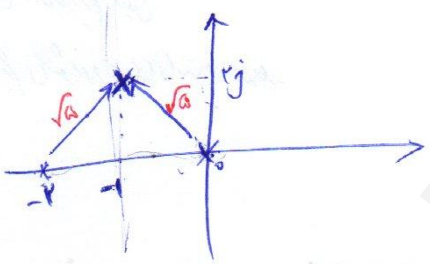
$$K = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s-p_i|}{\prod_{j=1}^{m} |s-z_j|}$$

$$\frac{K\prod_{j=1}^{m} |s-z_j|}{\prod_{i=1}^{n} |s-p_i|} = 1$$

کنترل - ۹۰/۱/۳۰
جلسه ۳

$$K = \frac{\text{حاصلضرب اندازه بردارهایی که از قطب‌های GH به مکان می‌آیند}}{\text{حاصلضرب اندازه بردارهایی که از صفرهای GH به مکان می‌آیند}}$$





$$K = \frac{1/2 \times 3/2}{1} = \frac{3}{4}$$

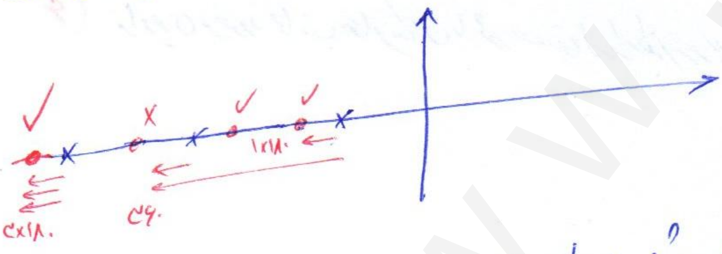
$$K = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{1} = 5$$

قواعد رسم مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه

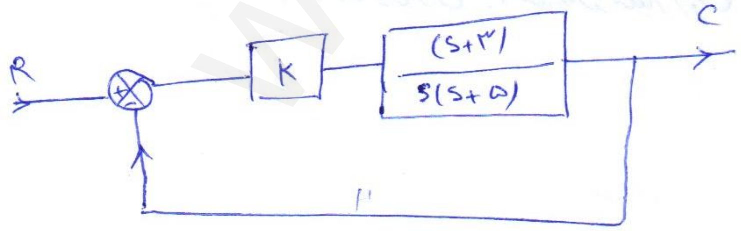
۱) مکان با $k=0$ از قطب‌های GH آغاز و با $k=\infty$ به سمت صفرهای محدود و یا ∞ می‌رود.

۲) تعداد شاخه‌های مکان n (تعداد قطب‌های GH) می‌باشد و مکان نسبت به محور حقیقی متقارن است.

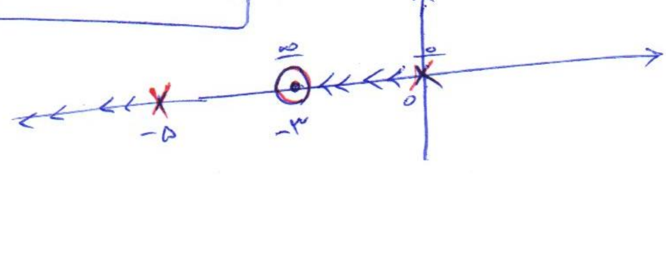
۳) قسمتی از محور حقیقی که تعداد مجموع صفرها و قطب‌های GH در سمت راست آن عدد فردی باشد جزء مکان است.



مثال: در سیستم شکل زیر مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه (قطب‌ها) را به ازای $k=0$ تا $k=\infty$ رسم نمایید.

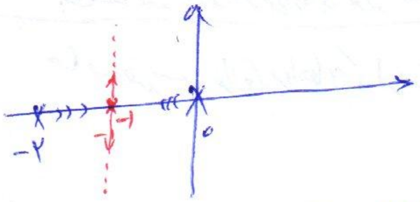


$$GH = \frac{k(s+3)}{s(s+5)}$$



۴) نقطه خروج مکان از محور حقیقی یا ورود مکان به محور حقیقی از رابطه زیر بدست می آید.

$$\frac{dk}{ds}=0$$



قطب ها باید به سمت صفر بروند یا بی نهایت چون صفر نداریم پس به هم نزدیک می شوند و بعد از محور خارج می شوند و به بی نهایت می روند.

$$1+GH=0$$

$$1+\frac{k}{s(s+2)}=0$$

$$k=-[s^2+2s] \Rightarrow \frac{dk}{ds}=-[2s+2]=0 \rightarrow s=-1$$

قطب ها در ۱- از محور خارج می شوند به سمت بی نهایت می روند.

۵) محل برخورد مجانب های مکان با محور حقیقی از رابطه زیر بدست می آید.

$$\text{محل برخورد مجانب مکان}=\frac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m}$$

n: تعداد قطب ها ، m: تعداد صفرها

۶) زاویه ی برخورد مجانب های مکان با محور حقیقی از رابطه زیر بدست می آید:

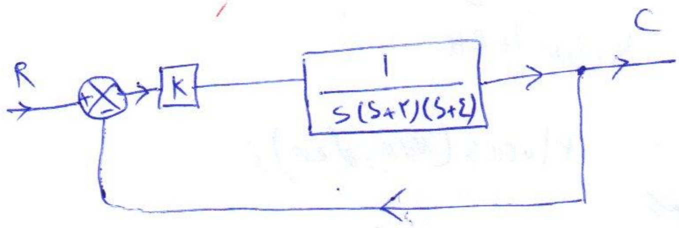
$$\phi_k=\frac{\pm(2k+1)\times 180}{n-m}$$

n: تعداد قطب ها ، m: تعداد صفرها

۷) محل برخورد مکان با محور موهومی را می توان با استفاده از معیار روث و یا قرار دادن $s=j\omega$ بدست آورد.

کنترل: ۳۰/۸/۹۰ _ جلسه ۵ — میان ترم دو یا سه هفته دیگر

مثال: مکان هندسی ریشه های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته زیر را وقتی K از صفر تا بی نهایت تغییر می کند را رسم نمایید.



$$GH = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

نقطه خروج

$$\frac{dk}{ds} = 0 \qquad \frac{K}{s(s+2)(s+4)} = -1$$

$$K = -\left[s^3 + 6s^2 + 8s\right]$$

$$\frac{dk}{ds} = -\left[3s^2 + 12s + 8\right] = 0$$

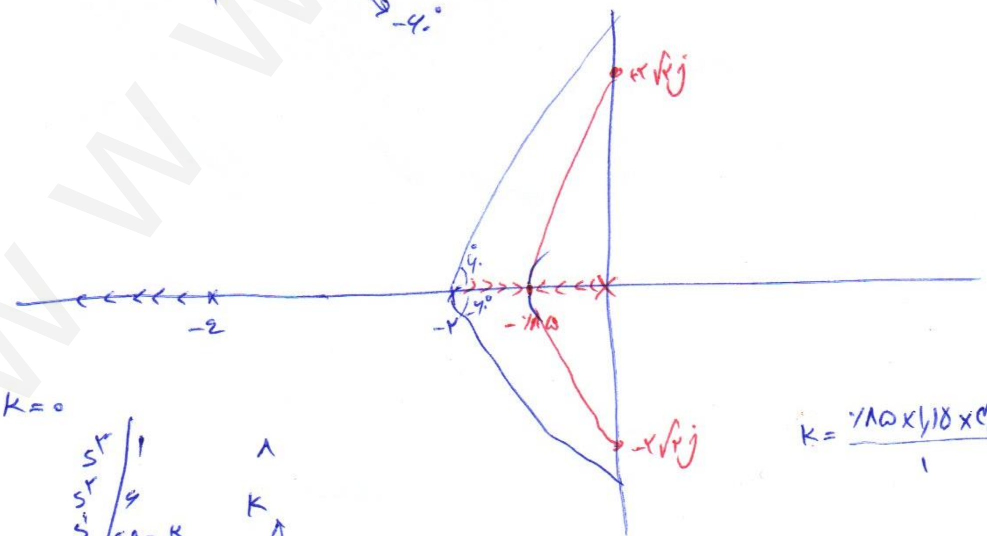
$$3s^2 + 12s + 8 = 0 \rightarrow -0.85, \quad -4, \ldots$$

محل تلاقی مجانب با محور حقیقی

$$\sigma = \frac{-4-2-0}{3-0} = -2$$

محل برخورد مجانب با محور حقیقی

$$\phi_k = \frac{\pm(2k+1)\times 180}{3} \rightarrow 60^\circ, \ -60^\circ$$



$$1 + GH = 0$$

$$s^3 + 6s^2 + 8s + K = 0$$

s^3	1	8
s^2	6	K
s^1	$\frac{48-K}{6}$	0
s^0	K	

$K = 48$

$$6s^2 + 48 = 0 \rightarrow s^2 = -8 \rightarrow s = \pm 2\sqrt{2}j$$

$$K = \frac{0.85 \times 1.15 \times 3.15}{1} = 3.07$$

$$= 1 + k \frac{NUM}{den}$$

$1+GH$ بدون k

rlocus(NUM, den);

رسم مکان ریشه‌ها

تکلیف هم این مثال آخر و هم مثال اول با Matlab رسم شود.

روش دوم برای مثال قبل:

راه دوم برابر برخورد با محور موهومی

$$s^3 + 6s^2 + 8s + k = 0$$

$$-j\omega^3 - 6\omega^2 + 8j\omega + k = 0$$

$$j\underbrace{(8\omega - \omega^3)}_{\omega^2 = 8,\ \omega = 2\sqrt{2}} + \underbrace{(k - 6\omega^2)}_{k = 48} = 0$$

۹۰/۲/۶ - کنترل - ص

مثال: مکان هندسی معادله مشخصه سیستمی با $GH = \frac{K(s+4)}{s(s+3)}$ (سیستم حلقه بسته) وقتی K از صفر تا بی نهایت تغییر می‌کند را رسم کنید.

$$1+GH=0 \rightarrow GH=-1$$

$$\frac{K(s+4)}{s(s+3)}=-1 \qquad K=-\left[\frac{s^2+3s}{s+4}\right]$$

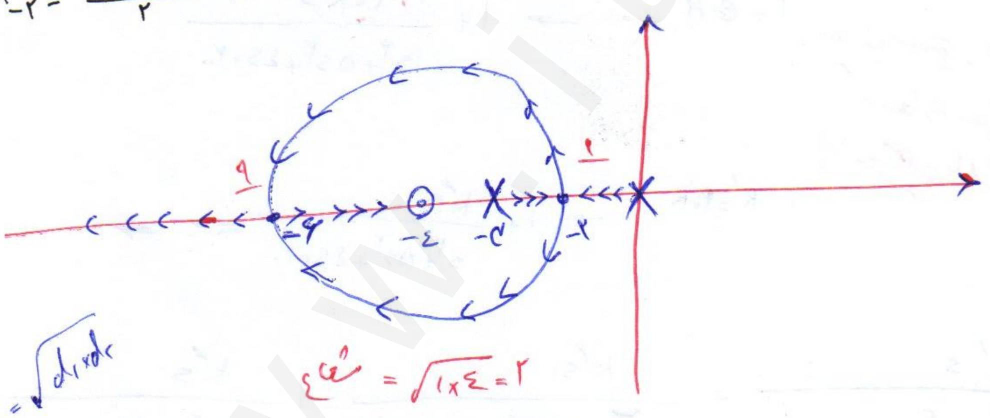
$$\frac{dK}{ds}=0 \Rightarrow \frac{dK}{ds}=\left[\frac{(2s+3)(s+4)-(s^2+3s)}{(s+4)^2}\right]=$$

$$2s^2+8s+3s+12-s^2-3s=0$$

$$\Rightarrow s^2+8s+12=0 \rightarrow s=-2,\quad s=-6$$

K های نقاط شکست ← (K های مربوط)

$$\begin{cases} K_{-6}=\frac{6\times 3}{2}=9 \\ K_{-2}=\frac{2\times 1}{2}=1 \end{cases}$$



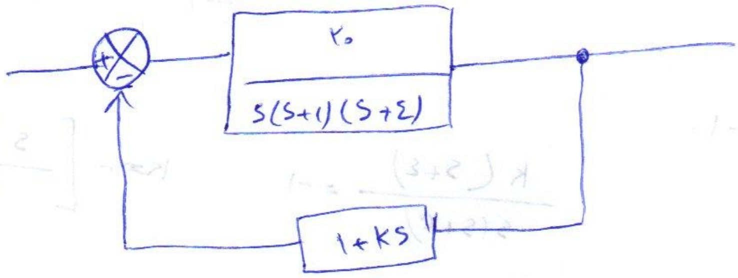
$\text{شعاع}=\sqrt{1\times 4}=2$

$\text{فاصله صفر}=\sqrt{d_1\times d_2}$

نکته: اگر GH دارای دو قطب و یک صفر (که صفر مابین دو قطب نباشد) باشد، آن قسمت از مکان که خارج از محور حقیقی است، دایره است؛ به مرکز صفر و شعاع فاصله هندسی قطب ها از صفر

$\text{شعاع دایره}=\sqrt{d_1\times d_2}$ ← جذر فاصله قطب ها از صفر

مثال: در سیستم شکل زیر مکان هندسی ریشه های معادله مشخصه را وقتی k از صفر تا بی نهایت تغییر می کند رسم نمایید.



$$GH = k\,\frac{Num}{den}$$

$$T(s) = \frac{\frac{20}{A}}{1+\frac{20}{A}\times(1+ks)} = \frac{20}{\underbrace{A+20(1+ks)}_{1+GH}}$$

$$1+GH=0 \rightarrow 1+\frac{20(1+ks)}{s(s+1)(s+4)}=0 \Rightarrow s^3+5s^2+4s+20+20ks=0$$

$$s^3+5s^2+4s+20+20ks=0$$

$$1+G'H'=0 \rightarrow 1+\frac{\overset{k'}{20k}s}{s^3+5s^2+4s+20}$$

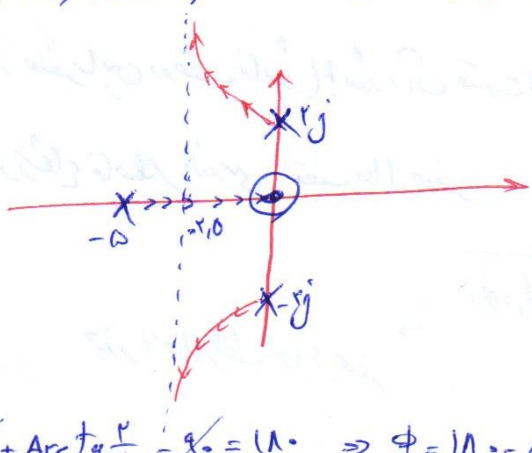
به یک سیستم معادل را در نظر می‌گیریم که معادله مشخصه آن با سیستم ما یکی باشد.

$$k'=20k \rightarrow 1+\frac{k's}{s^3+5s^2+4s+20}=0 \Rightarrow$$

$$G'H' = \frac{k's}{s^3+5s^2+4s+20} = \frac{k's}{s^2(s+5)+4(s+5)} = \frac{k's}{(s^2+4)(s+5)}$$

$$\phi_k = \frac{\pm(2k+1)180}{3-1} = \pm 90^\circ$$

$$\frac{-5-2j+2j-0}{3-1} = -2.5$$

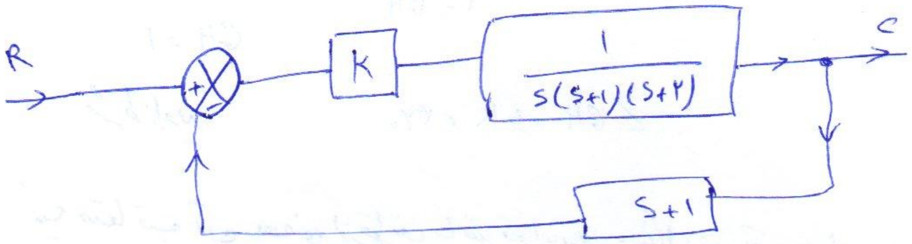


زاویه خروج قطب $(2j)$ $\rightarrow \phi + 90 + \text{Arctg}\frac{2}{5} - 90 = 180 \Rightarrow \phi = 180 - \text{Arctg}\,2/5 = 158^\circ$

جلسه ۳ - کنترل - ۹۰/۲/۶

نکته: زاویه خروج از قطب های GH (زاویه ورود به صفرهای GH) که خارج از محور حقیقی قرار دارند را می‌توان با کمک شرط زاویه بدست آورد.

نکته: حذف قطب GH توسط صفر H



$$GH = \frac{K(S+1)}{S(S+1)(S+2)} = \underbrace{\frac{K}{S(S+2)}}$$

این دو قطب با K تغییر می‌کنند.

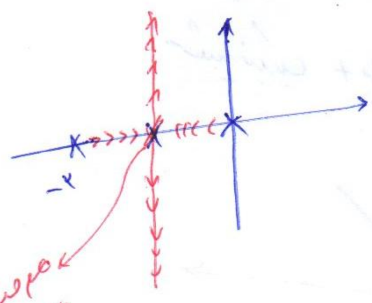
$$T = \frac{\frac{K}{S(S+1)(S+2)}}{1+\frac{K}{S(S+2)}}$$

$$T = \frac{\frac{K}{S+1}}{(S^2+2S+K)}$$

$$T = \frac{K}{\underbrace{(S+1)}_{\text{غیروابسته به K}}\underbrace{(S^2+2S+K)}}$$

(ثابت می‌ماند)

این دو قطب به K وابسته می‌باشند.



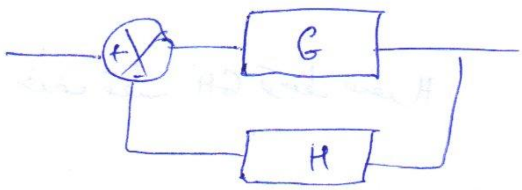
هم صفر هم قطب این نقطه در مکان هندسی ریشه‌ها باشد

یعنی موقع رسم مکان هندسی ها صفر قطب ها و صفرها به غیر از قطب غیروابسته را رسم می‌کنیم و در آخر قطب غیر وابسته را در شکل می‌گذاریم و آن جزء مکان هندسی ریشه‌ها می‌باشد.

نکته:

برای مطالعه (در امتحان نمی آید)

رسم مکان هندسی ریشه ها (معادله مشخصه) برای فیدبک مثبت :



$$T = \frac{G}{1 - GH}$$

$1 - GH = 0$

$GH = 1$

شرط زاویه $\angle GH = \pm k \times 360$

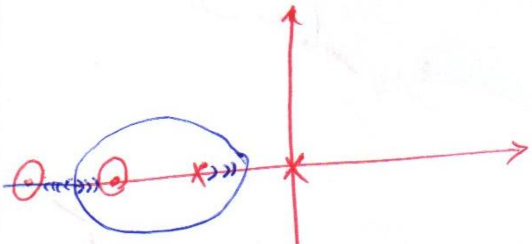
که متعاقب آن بعضی از قوانین مانند قواعد زیر به شکل زیر تغییر می یابد *

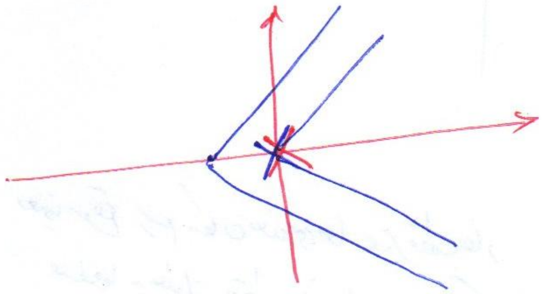
آن قسمت از محور حقیقی که تعداد قطب ها و صفرهای سمت راست آن عدد زوج باشد جزء مکان است

زاویه برخورد مجانب $\phi_k = \frac{\pm k360}{n-m}$

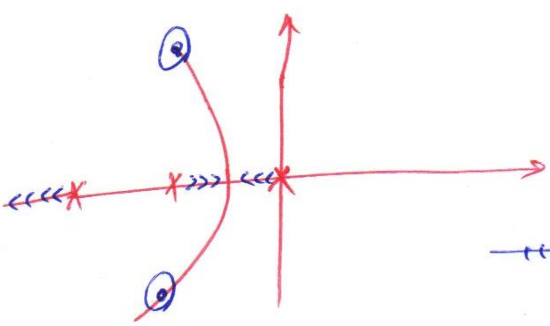
برای اطلاعات بیشتر به کتاب مراجعه شود.

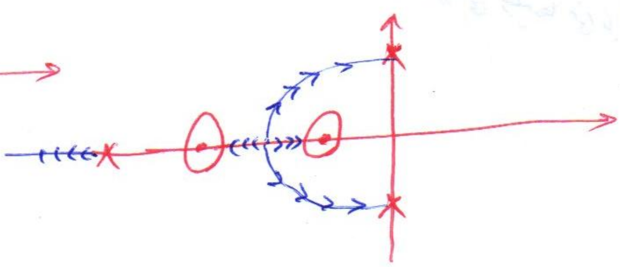
اگر فیدبک منفی داده شود و مکان ریشه ها از k (۰ تا $-\infty$) خواستند، در این شرایط نیز مکان ریشه ها شبیه فیدبک + برای k (۰ تا $+\infty$) می شود.





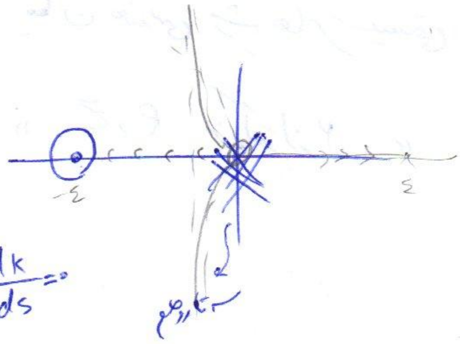
$$\frac{\pm(2k+1)180}{2} \quad \begin{cases} -90 \\ +90 \end{cases}$$





(۵۱)

تمرین: Matlab : در میان ترم هم می‌آید ٤×۶۵



$1+GH=0$, $\frac{K(s+4)}{s^2}=-1 \Rightarrow K(s+4)=-s^2$

$\Rightarrow K=\frac{-s^2}{s+4}=0$

مشتق $=\frac{-2s(s+4)-(-s^2)}{(s+4)^2}$

$-2s^2-8s+s^2=0 \Rightarrow -s^2-8s=0 \Rightarrow s^2+8s=0 \Rightarrow s(s+8)=0$

$\to s=0$, $s=-8$

$$GH=\frac{K(s+4)}{s^2}$$

$\frac{dK}{ds}=0$

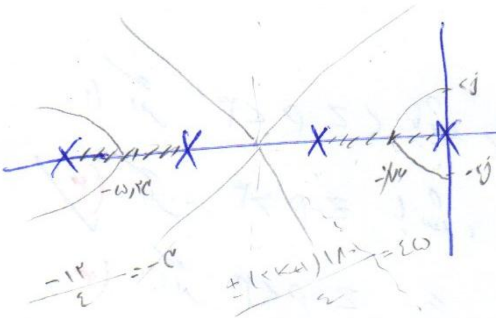
$\frac{0+4}{2-1}=4$, $\frac{\pm(2k+1)180}{2-1}=\pm180$

---

s^4	1	44	K
s^3	12	48	0
s^2	40	K	
s^1	$\frac{40\times48-12K}{40}$	0	
s^0	K		

$K=160$, $40s^2+160=0$

$40s^2=-160 \Rightarrow s^2=-4 \Rightarrow s=\pm2j$



$$GH=\frac{K}{s(s+2)(s+4)(s+6)}$$

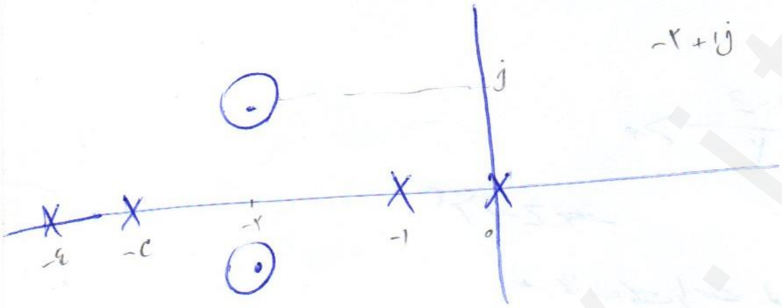
$\frac{-12}{4}=-3$, $\frac{\pm(2k+1)180}{4}=45$

$s^4+12s^3+44s^2+48s \Rightarrow \frac{ds}{dK}=4s^3+36s^2+88s+48$

$s^2(s+36)+8(11s+6)=0$

$s_1=2.32\angle105$, $2.32\angle-105$

$2.32\angle180$, $0.96\angle180$, $2\angle180$



$-2+j$

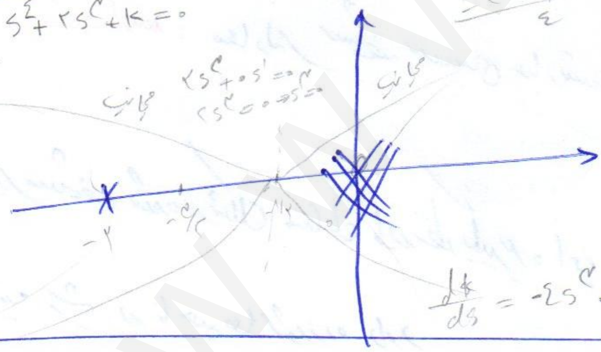
$$GH=\frac{K(s^2+4s+5)}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$$

$\frac{K(s^2+4s+5)}{s^4+8s^3+19s^2+12s}=-1$, $-\frac{s^4+8s^3+19s^2+12s}{s^2+4s+5}$

$s^4+2s^3+K=0$

s^4	1	K
s^3	2	0
s^2	K	0
s^1		
s^0		

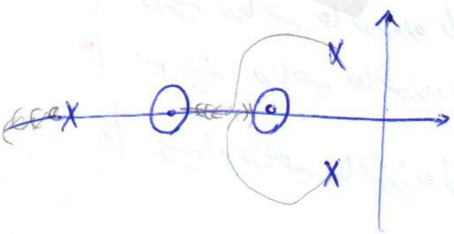
$\frac{\pm(2k+1)180}{4}=\pm45$, $\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$



$$GH=\frac{K}{s^3(s+2)}$$

$\frac{dK}{ds}=-4s^3-6s^2=0$, s^4+2s^3

$\Rightarrow -s^2(4s+6) \Rightarrow s=0$, $s=0$, $s=-\frac{3}{2}$



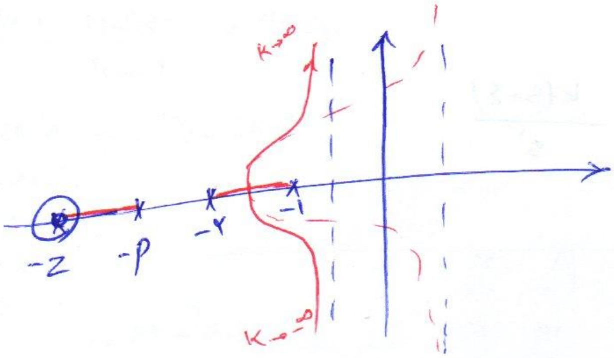
$$GH=\frac{K(s+3)(s+4)}{(s^2+4s+5)(s+6)}$$

$s^3+4s^2+5s+6s^2+24s+30$, $\frac{s^2+3s+4s+12}{s^3+10s^2+29s+30}$

مثال - تست ارشد:

مکان هندسی ریشه های سیستمی مطابق شکل است ، کدام گزینه در مورد پایداری سیستم صحیح است؟

« P و Z بزرگتر از ۲ »



۱) اگر $0 < Z-P < 3$ باشد برای تمام K های مثبت سیستم پایدار نیست.

۲) اگر $Z-P > 3$ باشد، 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 .

۳) اگر $Z-P < 3$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 .

۴) اگر $P = Z$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 .

حل / محل برخورد $\dfrac{-2-1-P+Z}{2} > 0$

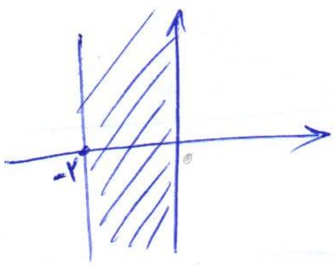
$\rightarrow Z-P > 3$

که جانب سمت راست محور می افتد

مثال: تست ارشد: معادله مشخصه سیستمی عبارتست از:

$s^3 + 5s^2 + 11s + 15 = 0$ $\rightarrow -3$, $2.2\angle 116$, $2.2\angle -116$

ناحیه مشخص شده در شکل مقابل را در نظر بگیرید، این معادله مشخصه:



۱) یک ریشه در ناحیه هاشورزده دارد

۲) دو ریشه در ناحیه هاشورزده دارد.

۳) سه ریشه در ناحیه هاشورزده دارد.

۴) ریشه ای در ناحیه هاشورزده ندارد.

حل:

s^3	۱	۱۱
s^2	۵	۱۵
s^1	۸	۰
s^0	۱۵	

* تمامی ریشه های معادله در سمت چپ محور موهومی قرار دارند، حال با تغییر S به (S-۲) داریم.

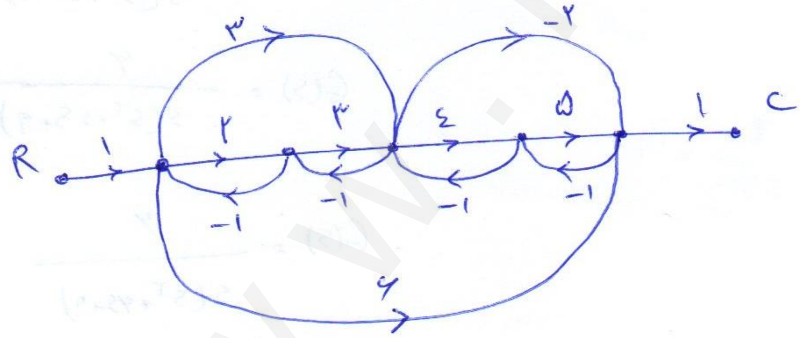
$$(S-2)^3 + 5(S-2)^2 + 11(S-2) + 15 = S^3 - S^2 + 3S + 5$$

s^3	۱	۳
s^2	-۱	۵
s^1	۸	۰
s^0	۵	

** لذا دو ریشه در سمت راست ۲- قرار دارد، لذا معادله مشخصه ۲ ریشه در ناحیه هاشور زده دارد.

مثال: بهره کل سیگنال گذر جریان (SFG) نشان داده شده در شکل زیر چیست؟

۱) $\frac{19}{13}$ ۲) ۷ ۳) $\frac{144}{90}$ ۴) $\frac{229}{156}$



تک

دو حلقه

۲×-۱

۳×-۱

۴×-۱

۵×-۱

۳×-۱×-۱

-۲×-۱×-۱

۴×-۲×-۱

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$T(s)$

$$E(s) = R(s) - R(s)T(s) = R(s)\left(1 - T(s)\right)$$

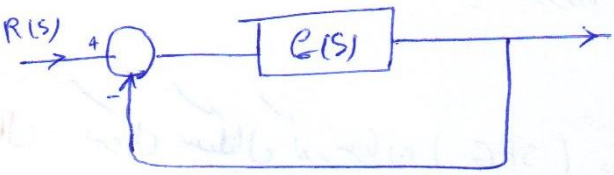
$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \times E(s)$$

مثال:

برای سیستم کنترل شکل زیر $G(s)$ از کمترین مرتبه را چنان تعیین کنید که اولاً خطای حالت دائمی ناشی از اعمال ورودی شیب واحد مساوی ۳/۲ باشد و ثانیاً دو ریشه از ریشه‌های معادله مشخصه سیستم در $-1 \pm j$ واقع باشند:

$s_1 = -1 - j$

$s_2 = -1 + j$



$s = -1 \pm j$

$s^2 = -2$

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s\,G(s)} = \frac{3}{2}$$

۱) $G(s) = \dfrac{4}{s(s^2+4s+6)}$ $\quad s^3+4s^2+6s$

۲) $G(s) = \dfrac{6}{s(s^2+2s+6)}$

۳) $G(s) = \dfrac{6}{s(s^2+4s+9)}$ $\quad s^3+4s^2+9s$

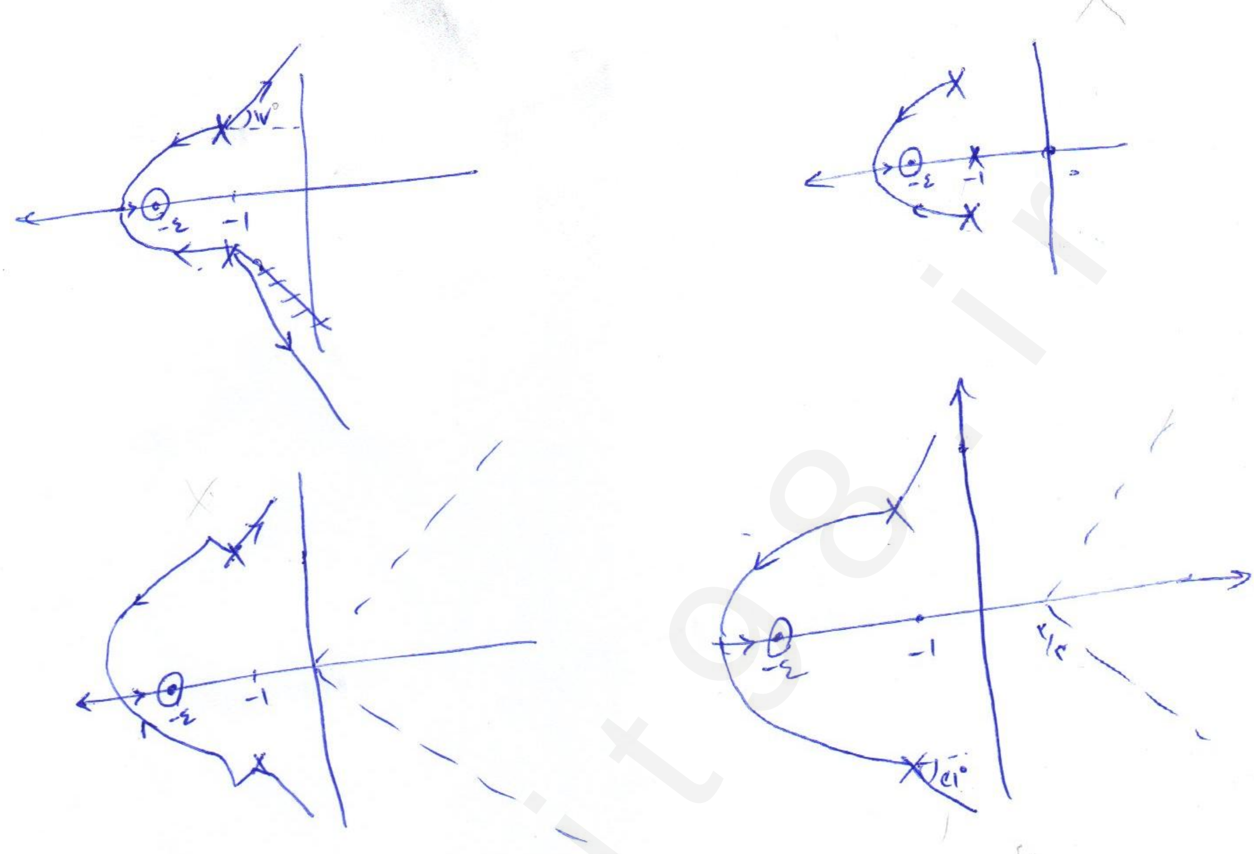
۴) $G(s) = \dfrac{6}{s(s^2+6s+9)}$ $\quad s^3+6s^2+9s$

۵۵

شنبه ۶-۵ بعد

– در یک سیستم با پس خورد منفی تابع تبدیل مدار باز $GH = \dfrac{s+4}{(s^2+2s+5)^2}$ است، مکان هندسی ریشه های این سیستم به کدام اشکال تقریب است؟

۱۶/ ۲۲۳



$\frac{2}{3} = \frac{-4+\ldots+4}{4-1}$

رسم پاسخ فرکانسی سیستم‌های خطی :

در یک سیستم LTI اگر ورودی ما (تحریک) سینوسی باشد، خروجی ما در حالت دائمی بصورت سینوسی است، با همان فرکانس اما با دامنه و فاز متفاوت :

نمودار بود Bode :

رسم دامنه و فاز سیستم به ازای فرکانس‌های مختلف بصورت لگاریتمی

$$GH(s)=\frac{K(s+\overset{\text{انرژی}}{\omega_{z_1}})(s+\omega_{z_2})\cdots(s+\omega_{z_m})}{s^n(s+\omega_{p_1})(s+\omega_{p_2})\cdots(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

$s=j\omega$

$$GH(j\omega)=\frac{K(j\omega+\omega_{z_1})(j\omega+\omega_{z_2})\cdots(j\omega+\omega_{z_m})}{(j\omega)^n(j\omega+\omega_{p_1})(j\omega+\omega_{p_2})\cdots(-\omega^2+2j\xi\omega_n\omega+\omega_n^2)}$$

$$GH(j\omega)=\frac{K'(1+j\frac{\omega}{\omega_{z_1}})(1+j\frac{\omega}{\omega_{z_2}})\cdots(1+j\frac{\omega}{\omega_{z_n}})}{(j\omega)^n(1+j\frac{\omega}{\omega_{p_1}})(1+j\frac{\omega}{\omega_{p_2}})\cdots(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n})}$$

$$20\log|GH|=20\log K'+20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{z_1}}\right|+20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{z_2}}\right|+\cdots+$$

$$20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{z_n}}\right|-20n\log\omega-20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{p_1}}\right|-20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{p_2}}\right|\cdots$$

$$-20\log\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right|$$

۵۷

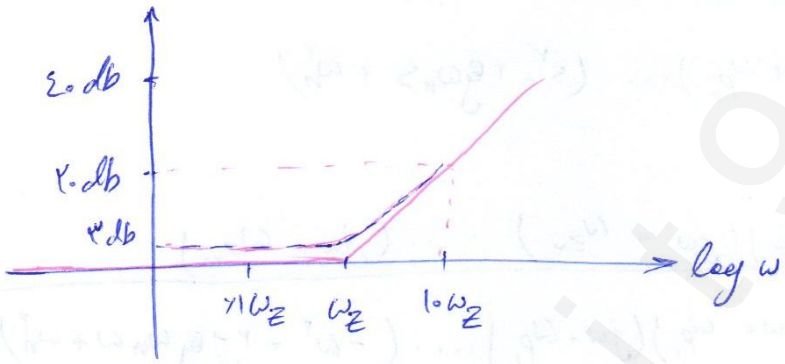
ص ۲

$$\angle GH(j\omega) = \cancel{\angle k'}^{\,0} + \angle\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{z_1}}\right) + \angle\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{z_2}}\right) + \dots \angle\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{z_m}}\right)$$

$$-90n - \angle\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{p_1}}\right) - \angle\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{p_2}}\right) \dots - \angle\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

$$20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_z}\right| = 20\log\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_z^2}} \simeq \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_z \quad \omega < 0.1\,\omega_z \\ 3\,db & \omega = \omega_z \\ 20\log\frac{\omega}{\omega_z} & \omega \gg \omega_z \end{cases}$$

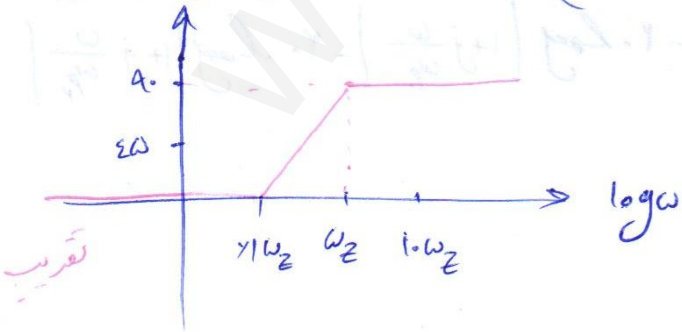
$20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_z}\right|$



مثال:

$$\angle\left(1+j\frac{\omega}{\omega_z}\right) = tg^{-1}\frac{\omega}{\omega_z} \simeq \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_z \quad \omega < 0.1\,\omega_z \\ 45^\circ & \omega = \omega_z \\ 90 & \omega \gg \omega_z \quad \omega > 10\,\omega_z \end{cases}$$

$\angle\left(1+j\frac{\omega}{\omega_z}\right)$



58

جلسه ۳ - ۹۰/۲/۲۷ - کنترل

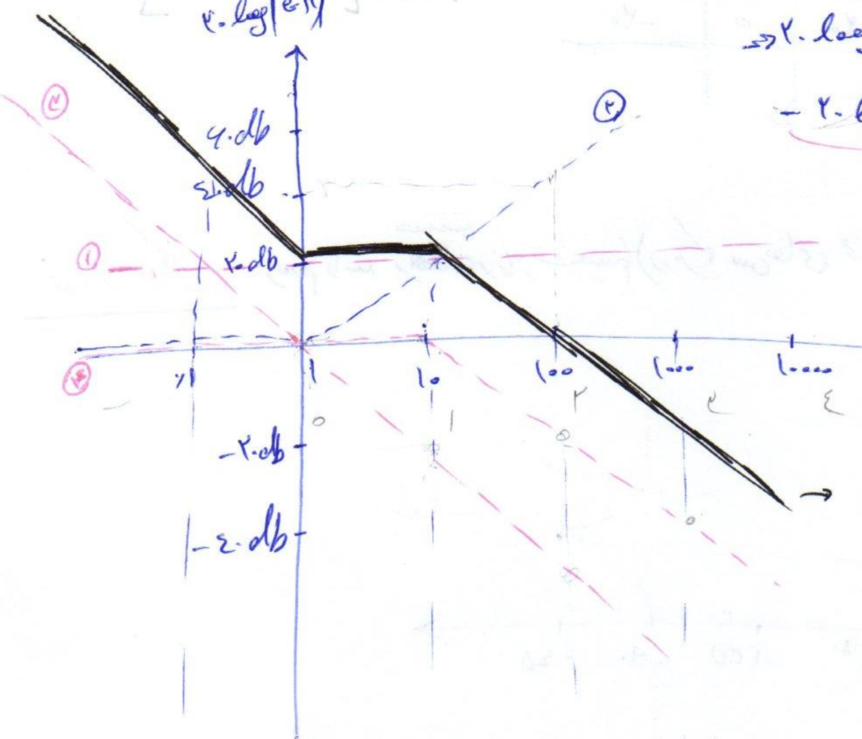
مثال: نمودار بود را برای سیستم زیر رسم کنید.

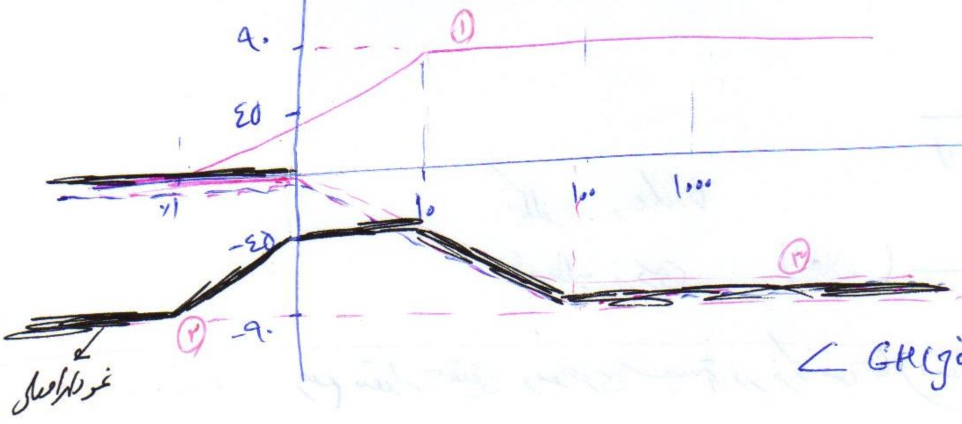
$$GH(s)=\frac{100(s+1)}{s(s+10)}$$

$$GH(j\omega)=\frac{100(j\omega+1)}{j\omega(j\omega+10)}=\frac{10(1+j\omega)}{j\omega\times 10\,(1+j\frac{\omega}{10})}$$

$$\Rightarrow 20\log|GH(j\omega)|=20\log 10+20\log\left|1+j\frac{\omega}{1}\right|-20\log\omega-20\log\left|1+j\frac{\omega}{10}\right|$$

$$20\log\sqrt{1^2+\left(\frac{\omega}{1}\right)^2}$$





$$\angle GH(j\omega)=\angle 10+\angle\left(1+j\frac{\omega}{1}\right)-90-\angle\left(1+j\frac{\omega}{10}\right)$$

	0.1	1	10	100	1000
$\angle(1+j\frac{\omega}{1})$	0	45	90	90	90
-90	-90	-90	-90	-90	-90
$-\angle(1+j\frac{\omega}{10})$	0	0	-45	-90	-90
	-90	-45	-45	-90	-90

$$\log 20\left|1+j\frac{\omega}{\omega_c}\right|=20\log\sqrt{1^2+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

$$\angle\left(1+j\frac{\omega}{\omega_c}\right)=\tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_c}$$

برای دامنه

	۰/۱	۱	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
$20\log\lvert 1+j\frac{\omega}{1}\rvert$	۰	۰	۲۰	۴۰	۶۰
$-20\log\omega$	۲۰	۰	-۲۰	-۴۰	-۶۰
$-20\log\lvert 1+j\frac{\omega}{10}\rvert$	۰	۰	۰	-۲۰	-۴۰
	۴۰	۲۰	۲۰	۰	-۲۰

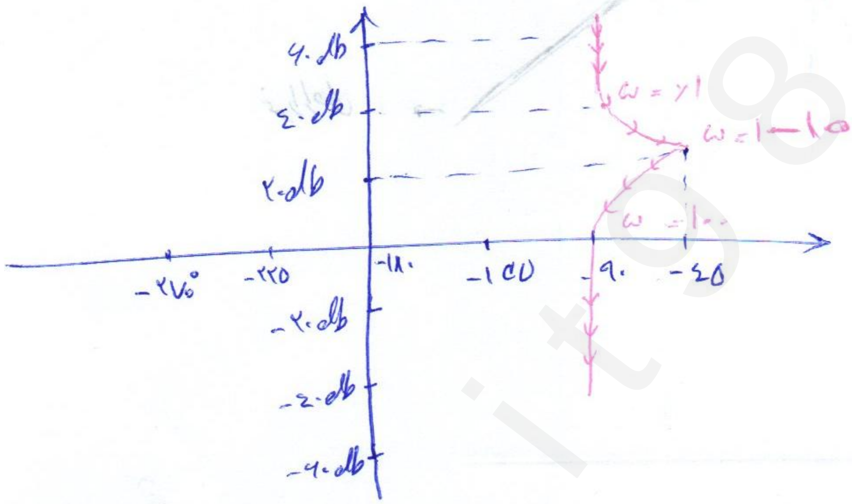
Matlab

```
Bode(num, den);
NUM=[100  100]
den=[1  10  0]
```

Matlab

```
Nichols(num, den)
```

نمودار نیکلز: رسم دامنه برحسب فاز سیستم (در فرکانس‌های مختلف):



Home Work

$$GH(s)=\frac{100(s+10)}{s(s+1)(s+100)}$$

Bode و نیکلز

$$GH(s)=\frac{100(s+10)}{s^2(s+1)}\quad (\text{امتحان})$$

مطلب و دستی

نمودار قطبی: رسم مقدار حقیقی و موهومی سیستم در فرکانس‌های متفاوت در صفحه‌ی مختلط

$$GH(s)=\frac{k}{s(s+1)}$$

$$GH(j\omega)=\frac{k}{j\omega(j\omega+1)}\times\frac{1-j\omega}{1-j\omega}=\frac{k(1-j\omega)}{j\omega(1+\omega^2)}=\frac{k}{j\omega(1+\omega^2)}-\frac{k(j\omega)}{j\omega(1+\omega^2)}$$

$$GH(j\omega)=-\frac{k}{1+\omega^2}-j\frac{k}{\omega(1+\omega^2)}\Longrightarrow GH(j\omega)=\frac{k}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}\angle -90-tg^{-1}\omega$$

۹۰

$\omega = ۰ \nearrow -K - j\infty$

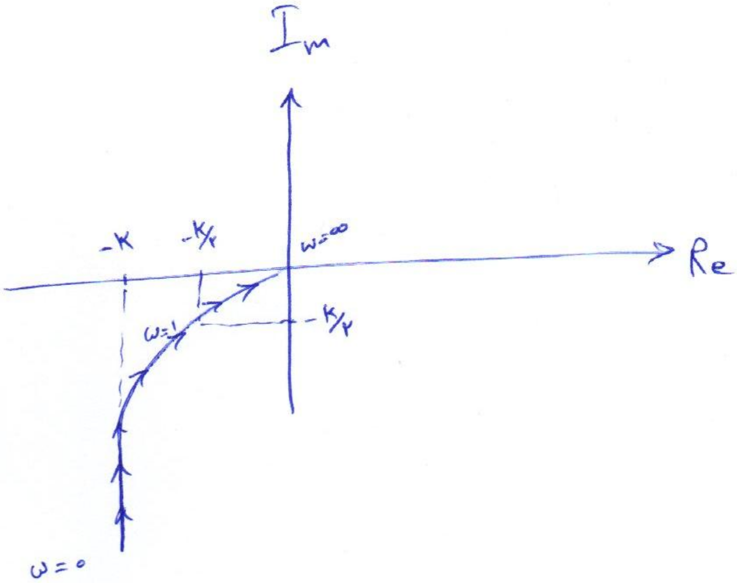
$\omega = ۰ \searrow \infty \angle -۹۰^\circ$

Nyquist(num, den)

$\omega = ۱ \longrightarrow \frac{-K}{۲} - j\frac{K}{۲}$

$\omega \rightarrow \infty \nearrow ۰ - j۰$ در مبدأ

$\omega \rightarrow \infty \searrow ۰ \angle -۱۸۰^\circ$



«بسمه تعالی»

(۸۱)

۹۰،۳،۳ - کنترل - جلسه

ص۱

قضیه کوشی: اگر متحرکی مسیر بسته‌ی Γ_s را یکبار در جهت عقربه‌های ساعت دور بزند تصویر آن تحت نگاشت $F(s)$، مسیر Γ_F خواهد بود که مبدأ مختصات را $N = Z - P$ در همان جهت دور می‌زند.

Z: تعداد صفرهای $F(s)$ داخل مسیر بسته Γ_s (صفر)

P: تعداد قطب‌های $F(s)$ داخل مسیر بسته Γ_s (قطب)

N: تعداد دوری که Γ_F مبدأ را دور می‌زند.

نکته: مسیر بسته‌ی Γ_s که حتی نباید از روی صفرها یا قطب‌های $F(s)$ عبور نماید (اگر رد شود قضیه کوشی صدق نمی‌کند)

معیار پایداری نایکوییست:

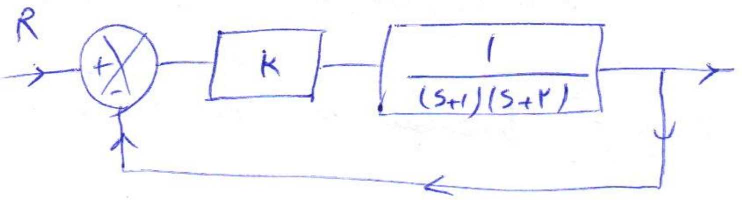
مسیر بسته‌ی Γ_s را بگونه‌ای انتخاب می‌کنیم که ناحیه ممنوعه را فرا گیرد، (متحرک یکبار در جهت عقربه‌های ساعت کل ناحیه‌ی ممنوعه را دور ~~پاد ساعت~~ بزند)، در حقیقت نیم دایره‌ای به شعاع بی‌نهایت، سپس Γ_s را تحت $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ (مخرج تابع انتقال حلقه بسته) نگاشت می‌دهیم و می‌بینیم تصویر آن چند بار مبدأ مختصات را دور می‌زند، با استفاده از رابطه‌ی $Z = N + P$ که در حقیقت Z تعداد قطب‌های تابع انتقال حلقه بسته $T = \frac{G}{1+GH}$ (تعداد صفرهای $F(s)$، $1+GH$) که در ناحیه‌ی ممنوعه قرار دارد را بدست می‌آوریم، اگر $Z = 0$ بود سیستم پایدار است در غیر اینصورت سیستم ناپایدار است.

$$Z = N + P$$

- Z: تعداد صفرهای $F(s)$ در ناحیه ممنوعه — تعداد قطب‌های $T(s)$ در ناحیه ممنوعه، $T = \frac{G}{1+GH}$
- N: تعداد دوری که تصویر مبدأ را دور می‌زند
- P: تعداد قطب‌های $1+GH$ در ناحیه ممنوعه (Γ_s) — تعداد قطب‌های GH در ناحیه ممنوعه

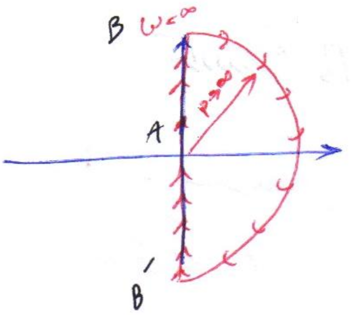
ص ۲

مثال: با استفاده از معیار پایداری نایکوییست، شرایط پایداری سیستم زیر را بررسی کنید (فرض $K>0$)



$$GH=\frac{K}{(S+1)(S+2)}$$

$$F=1+GH$$



$\longrightarrow$ GH $\longrightarrow$ (شکل پایین صفحه)

$$GH(j\omega)=\frac{K}{(1+j\omega)(2+j\omega)}=\frac{K(1-j\omega)(2-j\omega)}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}=\frac{K(2-3j\omega-\omega^2)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$$

$$GH(j\omega)=\frac{K(2-\omega^2)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}-j\frac{3K\omega}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$$

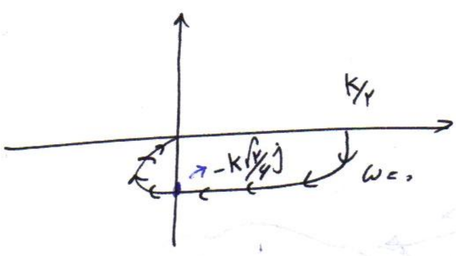
$\omega=0 \longrightarrow \frac{K}{2}-j0$

$\longrightarrow K/2\angle 0$

$\omega=\infty \longrightarrow 0-j0$

$\longrightarrow 0\angle -180^\circ$

$$Re(GH(j\omega))=0 \Rightarrow \omega=\pm\sqrt{2} \rightarrow GH(j\omega)=\frac{-3K\sqrt{2}}{3\times 6}=-\frac{K\sqrt{2}}{6}j$$



(۹۳)

۹۰٫۳٫۳ - کنترل - جلسه ۳

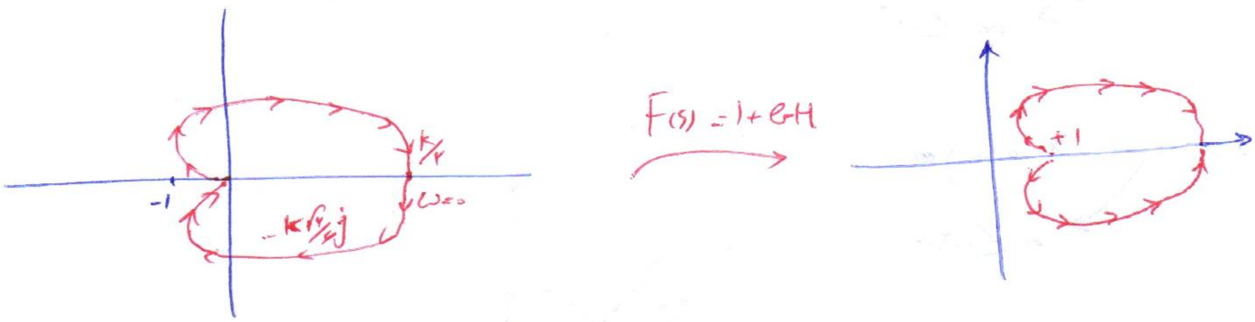
«سیستم تعادل»

نیم‌دایره به شعاع بی‌نهایت از B به B'

$$GH(s)\Big|_{\substack{s=\rho e^{j\theta}\\ \rho\to\infty}} = \frac{K}{(\rho e^{j\theta}+1)(\rho e^{j\theta}+2)} = \frac{K}{\rho^2 e^{2j\theta}} = \frac{K}{\rho^2} e^{-2j\theta}\Big|_{\rho\to\infty} = 0\angle -2\theta$$

در مبدأ می‌افتد

از $\omega=-\infty$ تا ۰ همان قرینه‌ی ω از ۰ تا ∞ می‌شود (A تا B می‌شود)



$Z = N + P$

$Z=0 \rightarrow$ سیستم حلقه بسته پایدار است

$$GH = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

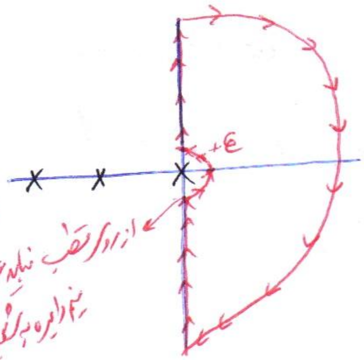
از این به بعد بجای اینکه تصویر تحت F را یک واحد شیفت دهیم و ببینیم چند بار مبدأ را دور می‌زند، می‌توانیم همان تحت GH بررسی کنیم، تصویر چند بار -1 را دور می‌زند.

مثال:

$$GH = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

ω از $+\varepsilon$ تا ∞ تغییر می‌کند.

به علت اینکه از قطب نباید عبور کنیم.



از روی قطب نباید عبور کنیم

نیم‌دایره به شعاع $\varepsilon\to 0$

٤٢ ص ٤

$$GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{K(1-j\omega)(2-j\omega)}{j\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = \frac{K(2-3j\omega-\omega^2)}{j\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$$

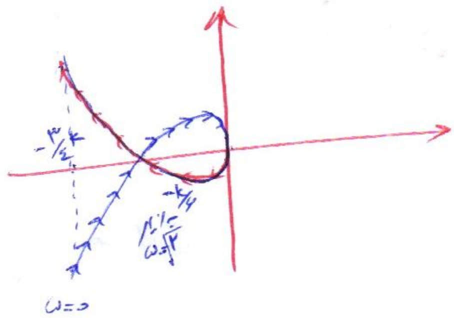
$$GH(j\omega) = \frac{K(2-\omega^2)}{j\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} - \frac{3K\cancel{j\omega}}{\cancel{j\omega}(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = \frac{-3K}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} - j\frac{K(2-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$$

$$GH(j\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+4}} \angle -90^\circ - tg^{-1}\frac{\omega}{1} - tg^{-1}\frac{\omega}{2}$$

$$\omega = 0 \longrightarrow -\frac{3}{4}K - j\infty \qquad \searrow \infty\angle -90^\circ$$

$$Im\left(GH(j\omega)\right) = 0 \longrightarrow \omega = \pm\sqrt{2} \rightarrow GH(j\omega) = -\frac{K}{6}$$

$$\omega = \infty \longrightarrow 0 + j0 \qquad \searrow 0\angle -270^\circ$$



$$GH(s)\Big|_{s=\rho e^{j\theta}} = \frac{K}{\rho e^{j\theta}(\rho e^{j\theta}+1)(\rho e^{j\theta}+2)} = \frac{K}{\rho^3} e^{-3j\theta} = \frac{K}{\rho^3}\angle -3\theta \nearrow 0\angle -3\theta$$

حال نگاشت نیم دایره از ∞ تا ∞- در مبدأ می‌افتد

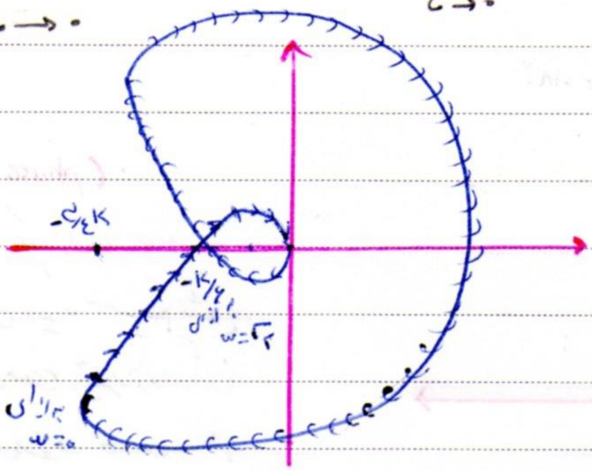
حال نگاشت قسمت آخر که قرینه اولی است.

حال نگاشت نیم دایره کوچک

$$GH\Big|_{\substack{s=\varepsilon e^{j\phi} \\ \varepsilon\to 0}} = \frac{K}{\varepsilon e^{j\phi}(\varepsilon e^{j\phi}+1)(\varepsilon e^{j\phi}+2)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{K}{2\varepsilon e^{j\phi}} = \infty\angle -\phi$$

حال نگاشت نیم دایره‌ی کوچیک

$$GH\Big|_{\substack{s=\varepsilon e^{j\varphi}\\ \varepsilon\to 0}} = \frac{K}{\varepsilon e^{j\varphi}(\varepsilon e^{j\varphi}+1)(\varepsilon e^{j\varphi}+2)}\Bigg|_{\varepsilon\to 0} = \frac{K}{2\varepsilon e^{j\varphi}}\Bigg|_{\varepsilon\to 0} = \infty \angle -\varphi$$



$|-K/6| < |-1| \Rightarrow K<6 \longrightarrow Z = N + P$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \quad 0 \quad 0$

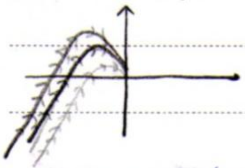
پایدار است.

$|-K/6| > |-1| \to K>6 \qquad Z = N + P$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \quad 2 \quad 0$

ناپایدار است.

۱۰/۷/۹۰ —

اگر گین سیستم را زیاد کنیم ۲ آن K برابر بشود، باید بین همه‌ی نقاط دور می‌شوند، به همان فاز قبلی.



حال اگر گین را باز هم زیادتر کنیم باز هم سیستم دورتر می‌رود

اگر گین را از حدی بیشتر کنیم سیستم ناپایدار می‌شود که به این گین، گین مارژین می‌گوییم

$G_m = \frac{1}{|\alpha|}$

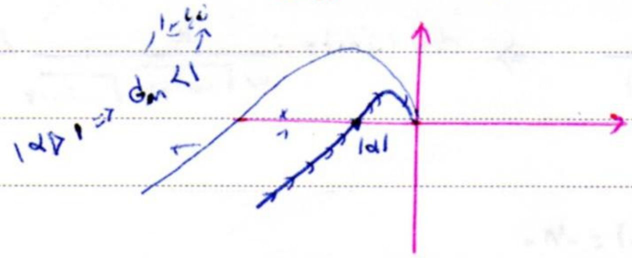
گین مارژین (حاشیه‌ی گین بهره): می‌خواهیم ببینیم گین GH را می‌توانیم چند برابر کنیم، اما همچنان سیستم پایدار بماند، به این مقدار حاشیه‌ی گین یا گین مارژین می‌گویند.

$G_m = \frac{1}{|\alpha|}$

$G_m > 1$ سیستم پایدار

$G_m = 1$ 〃 مرز

$G_m < 1$ 〃 ناپایدار



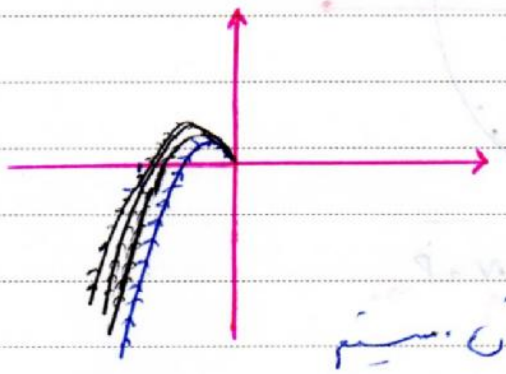
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$G_M = \frac{1}{|Re(GH(j\omega))|}\Bigg|_{Im[GH(j\omega)]=0}$$

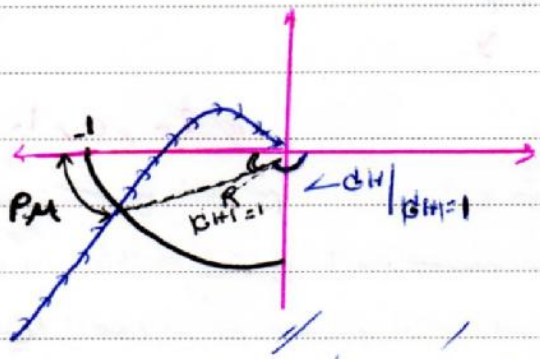
$$G_M = \frac{1}{|GH|}\Bigg|_{\angle GH = -180^\circ}$$

حاشیه فاز (phase margin):

اگر تمام نقاط موجود در سیستم مقدار فازی بیفزاییم
به سمت فاز تبدیل می‌کنیم خواهیم دید به سیستم شروع
به چرخیدن می‌کند تا زمانی که از حدی بیشتر شود از آن
حد به بعد سیستم ناپایدار می‌شود. حد مورد نظر
حاشیه فاز نام دارد.



- چه مقدار می‌توان سیستم GH را چرخاند اما همچنان سیستم
حلقه بسته پایدار بماند.



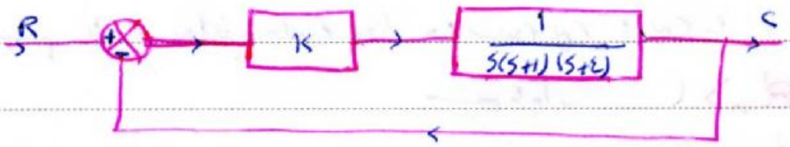
$$PM = \angle GH\Big|_{|GH|=1} + 180^\circ$$

$PM > 0$ پایدار

$PM = 0$ مرز

$PM < 0$ ناپایدار

مثال/ در سیستم شکل زیر مقدار K را به گونه‌ای تعیین کنید که حاشیه بهره برابر ۱۰ شود.
در این شرایط حاشیه فاز را به دست آورید.



$$GH(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

$$GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+4)} \Rightarrow GH(j\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+16}} \angle -90 - tg^{-1}\omega - tg^{-1}\frac{\omega}{4}$$

$$GM = \frac{1}{|GH(j\omega)|}\Bigg|_{\angle GH(j\omega) = -180}$$

PAPCO

$\tan^{-1}\alpha + \tan^{-1}\beta = \tan^{-1}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$-90 - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{4} = 90 \Rightarrow \tan^{-1}\frac{\omega+\frac{\omega}{4}}{1-\frac{\omega^2}{4}} = 90 \xrightarrow{A=\infty}$

A

$1-\frac{\omega^2}{4} = 0 \longrightarrow \boxed{\omega = 2}$

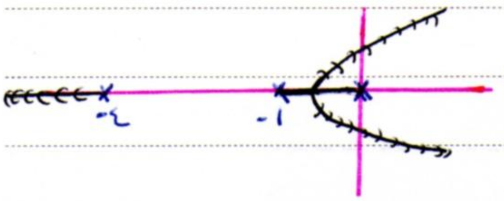
$|GH(j\omega)|_{\omega=2} = \frac{K}{2\sqrt{5}\sqrt{20}} = \frac{K}{20} \Rightarrow GM = \frac{20}{K} \xrightarrow{GM=10} \boxed{K=2}$

$PM = \angle GH|_{|GH|=1} + 180°$

$|GH| = 1 \Rightarrow \frac{2}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+16}} = 1 \Rightarrow \omega = 0.45$

$\angle GH|_{\omega=0.45} = -90 - \tan^{-1}0.45 - \tan^{-1}\frac{0.45}{4} \simeq -120 \Big\} \quad PM = -120+180 = 60°$

نکته: در سیستم های کامل تقریبا با سیستم های مرتبه دو (اگر GM بزرگ) PM ، تقریباً 100ξ می باشد.



$PM = 60 \simeq 100\xi \Rightarrow \xi = 0.6 \qquad PO = 100\, e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

مثال) محاسبه PM، GM از روی نمودار بُد.

$GM = \frac{1}{|GH|}\Big|_{\angle GH=-180}$

$20\log GM = -20\log|GH|\,\Big|_{\angle GH=-180°}$

$GM(db) = -20\log|GH|\,\Big|_{\angle GH=-180°}$

$PM = \angle GH|_{|GH|=1} + 180$

$PM = \angle GH|_{20\log|GH|=0} + 180°$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

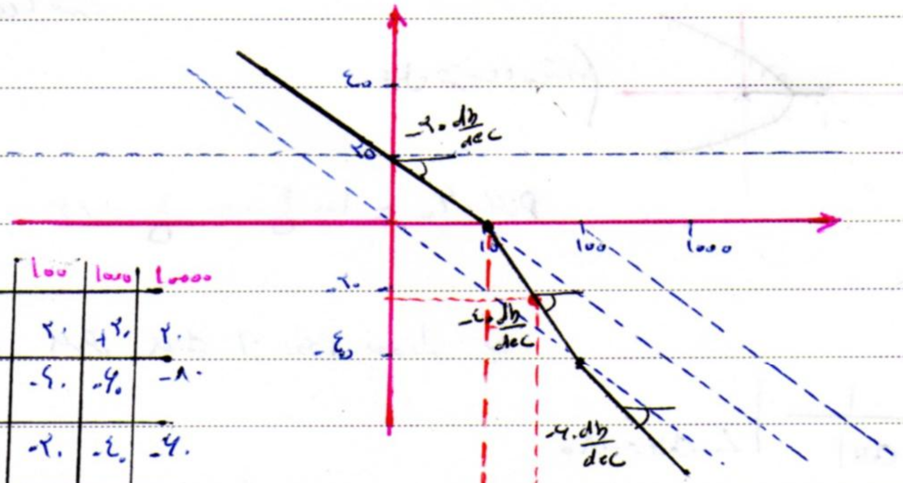
مثال) در سیستم زیر تابع انتقال حلقه‌باز سیستم حلقه‌بسته‌ای به صورت زیر می‌باشد.
۱) دیاگرام بد برای GH رسم نمایید
۲) از روی آن حاشیه‌ی گین و فاز سیستم حلقه‌بسته را بدست آورید (تا زمانی که پایدار بماند)
۳) دیاگرام nicholse GH را رسم نمایید

$$GH(s) = \frac{10000}{S(S+10)(S+100)} \overset{\text{اتفاق}}{\Longrightarrow} \frac{10000}{S^2(S+10)(S+100)}$$

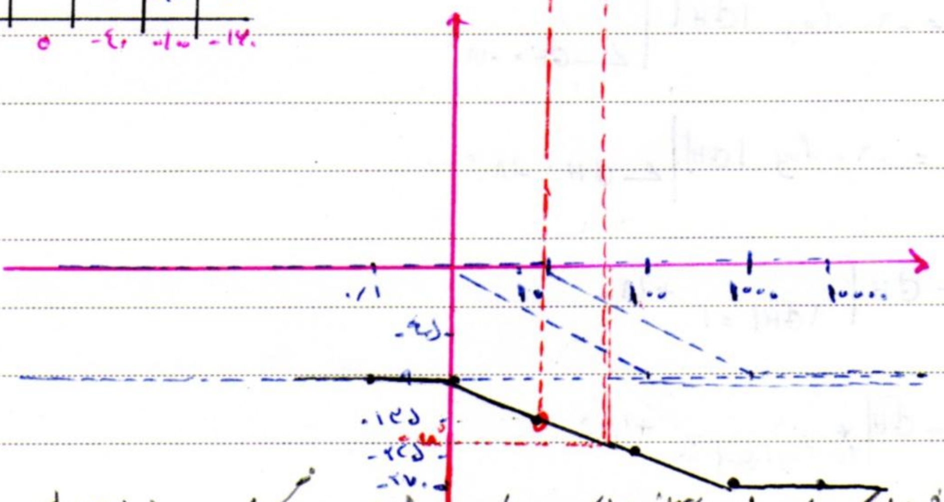
$$GH(j\omega) = \frac{10000}{j\omega(j\omega+10)(j\omega+100)} = \frac{10000}{j\omega \times 10 \times (1+j\frac{\omega}{10}) \times 100 (1+\frac{j\omega}{100})}$$

$$GH(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1+j\frac{\omega}{10})(1+j\frac{\omega}{100})}$$

$$20\log|GH(j\omega)| = 20\log 10 - 20\log\omega - 20\log\left|1+j\frac{\omega}{10}\right| - 20\log\left|1+j\frac{\omega}{100}\right|$$



	۰/۱	۱	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
$-20\log\omega$	۲۰	۰	-۲۰	-۴۰	-۶۰	-۸۰
$-20\log\lvert 1+j\frac{\omega}{10}\rvert$	۰	۰	۰	-۲۰	-۴۰	-۶۰
$-20\log\lvert 1+j\frac{\omega}{100}\rvert$	۰	۰	۰	۰	-۲۰	-۴۰
	۴۰	۲۰	۰	-۴۰	-۱۰۰	-۱۴۰



$$\angle GH(j\omega) = \angle 10 - 90^\circ - \angle(1+j\omega/10) - \angle\left(1+\frac{j\omega}{100}\right)$$

	0.1	1	10	100	1000	10000
-90	-90	-90	-90	-90	-90	-90
زاویه $\frac{s}{10}$	0	0	-45	-90	-90	-90
زاویه $\frac{s}{100}$	0	0	0	-45	-90	-90
	-90	-90	-135	-225	-270	-270

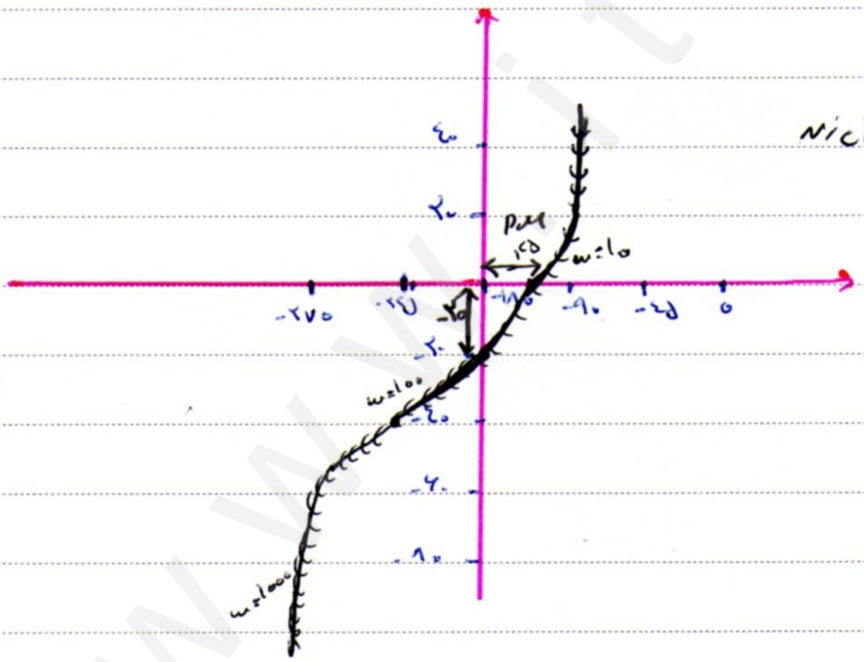
$$PM = \angle GH \Big|_{20\log|GH|=0} + 180 = -135 + 180^\circ = 45$$

$$GM = -20\log|GH| \Big|_{\angle GH=-180} = +20\,db$$

$GM(db) > 0$

مرز $GM(db)\ (db) = 0$

$GM(db) < 0$ ناپایدار



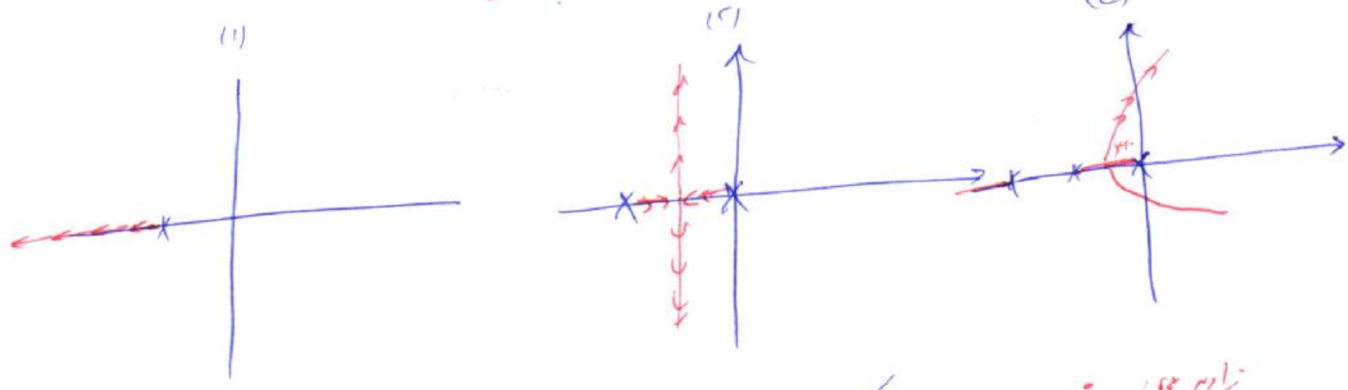
Nichols(num, dem)

۷۰

باسمه تعالی

کنترل - ۹۰/۲/۲۲ - جلسه | ص ۱

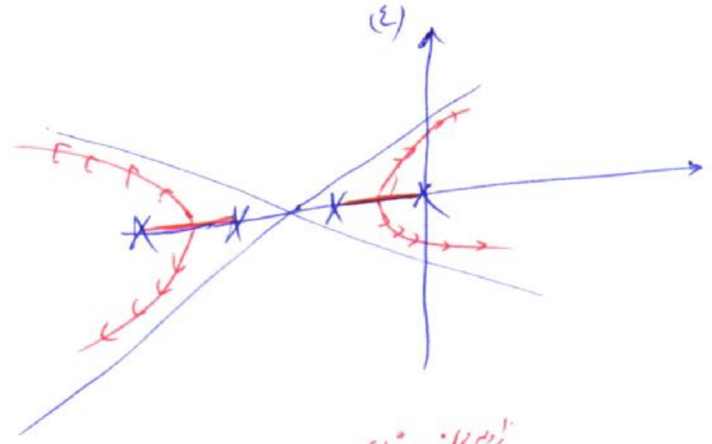
اثر افزودن قطب به تابع انتقال حلقه باز به سیستم حلقه بسته :



k زیاد میشود

اگر k زیاد شود ← اورشوت و ...

زاویه مجانب = ۶۰°

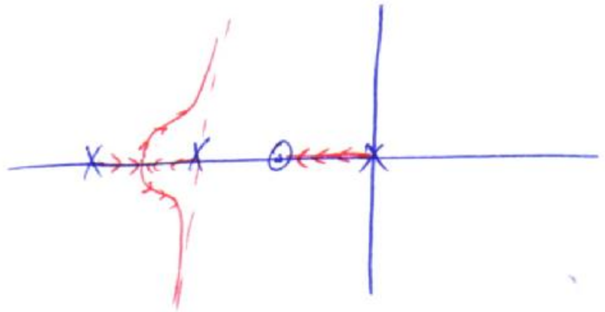


زاویه مجانب = ۴۵°

با افزایش تعداد قطب ها تعداد شاخه های مکان افزایش پیدا می کند، احتمال رفتن به سمت راست (ناپایدار) بیشتر می شود
به عبارتی سیستم ناپایدارتر شده است. (سیستم از لحاظ زمان نشست کندتر می شود)

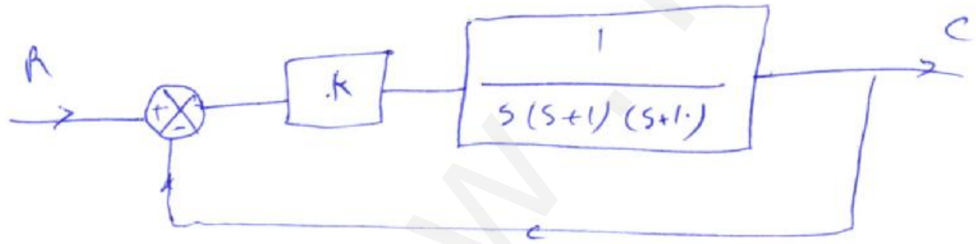
اثر افزودن صفر (صفر منفی) به تابع انتقال حلقه باز یک سیستم حلقه بسته:

صفر منفی یکی از شاخه‌های مکان را به خود متمایل کرده و احتمال رفتن قطب‌ها به سمت راست با افزایش K ~~کمتر می‌شود~~ به عبارتی ~~سیستم پایدارتر می‌شود نسبت~~ نسبت به حالتی که صفر موجود نبوده کمتر می‌شود و به عبارتی سیستم پایدارتر می‌شود.
(سیستم از لحاظ زمان نشست سریعتر می‌شود.)



کنترل کننده‌های جبران ساز:

مثال: در شکل زیر مقدار K را طوری بیابید که سیستم پایدار بوده و خطای ماندگار به ورودی شیب واحد کمتر از یک درصد شود.



$$1+GH=0 \rightarrow 1+\frac{K}{s(s+1)(s+10)}=0$$

$$\rightarrow s^3+11s^2+10s+K=0 \rightarrow \boxed{0<K<110}$$

تناقض

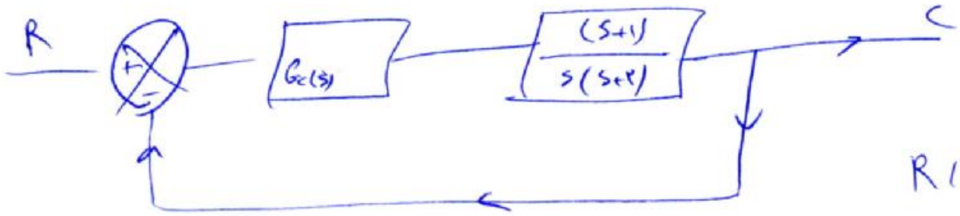
$$e_{ss}=\frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)}=\frac{1}{\lim_{s\to 0}\frac{K}{(s+1)(s+10)}}<\frac{1}{100} \rightarrow \frac{10}{K}<\frac{1}{100} \rightarrow \boxed{K>1000}$$

۷۲

جلسه ۳ - کنترل - ۹۰٫۳٫۲۲

تناسبی انتگرالی	تناسبی مشتق	تناسبی مشتق - انتگرالی
PI	PD	PID
$\left(k_g + \frac{k_i}{s}\right)$	$(k_g + k_D s)$	$\left(k_g + k_D s + \frac{k_i}{s}\right)$
بهبود خطای ماندگار	بهبود پایداری	بهبود نسبی خطای ماندگار و پایداری

مثال: در شکل زیر ساده‌ترین جبران کننده برای آنکه خطای ماندگار به ورودی $R(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad t > 0$ کمتر از ۱/۰ شود کدام است؟



$R(t) = \frac{1}{2}t^2$

انتگرال گیر $\quad I \quad \frac{k_i}{s}$

$$G_c(s) = \frac{k_i}{s} \qquad G_c(s) \times G = \frac{k_i(s+1)}{s^2(s+2)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{\lim s^2 \times \frac{k_i(s+1)}{s^2(s+2)}} = \frac{1}{10} \rightarrow \frac{2}{k_i} = \frac{1}{10} \Rightarrow \boxed{k_i = 20}$$

$$1 + GH = 0$$

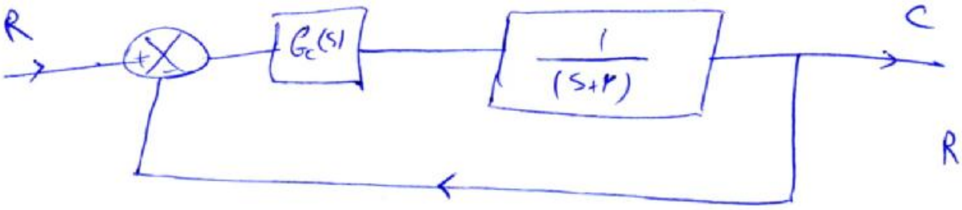
$$1 + \frac{20(s+1)}{s^2(s+2)} = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 20s + 20 = 0$$

$40 > 20$ پس سیستم دارای شرایط پایداری می‌شود.

مثال: در سیستم شکل زیر $G_c(s)$ را طوری بیابید که خطای ماندگار به ورودی شیب واحد کمتر از ۱ درصد شود و نسبت میرایی قطب‌های حلقه بسته برابر ۷۰٪ گردد.

ξ



$R(t) = tu(t)$

از PI استفاده می‌شود $\longrightarrow \dfrac{K_p s + K_i}{s(s+2)}$

چرا I استفاده کنیم؟ چون آن e را می‌خواهیم کم در بیاید. وگرنه از I هم می‌شود استفاده کرد.

$$e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s \times \frac{K_p s + K_i}{s(s+2)}} = \frac{2}{K_i} = \frac{1}{100}$$

$$\boxed{\Rightarrow K_i = 200}$$

$$1 + GH = 1 + \frac{K_p s + K_i}{s(s+2)} = s^2 + 2s + K_p \times s + K_i$$

$$s^2 + (2 + \underbrace{K_p}_{\text{انوس}})s + K_i = s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2$$

$$\omega_n = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \cong 14$$

$$2 + K_p = 2\xi\omega_n$$

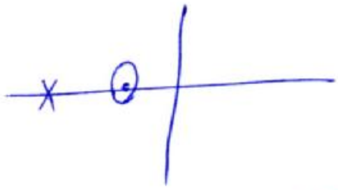
$$2 + K_p = 2 \times 0.7 \times 10\sqrt{2} = 14.72$$

$$\boxed{K_p = 14.72 - 2}$$

$$\boxed{K_i = 200}$$

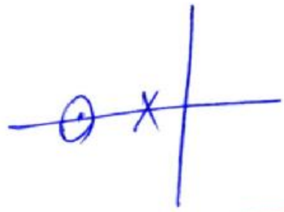
عث

جبران کننده‌ی پیش فاز:



Lead
پیش فاز
بهبود پایداری

جبران کننده‌ی پس فاز:



Lag
پس فاز
بهبود خطای ماندگار

نمونه سوال امتحانی

سوال ۱ (۳/۵ نمره) پارامترهای سیستم مرتبه دوم ← پارامترها را طوری بیابید که پاسخ خطای ورودی پله ← صفر شود

سوال ۲ (۲/۵ نمره) بلوک دیاگرام حل به کمک سیگنال فلوگراف ← میسون ← معادله‌ی سیستم بدست آورده می‌شود ← از روی آن خطای ماندگار را بدست آورید.

$E(s) = R(s) - C(s)$ تابع انتقال

$E(s) = R(s) - R(s)T(s)$

خطای ماندگار $E(s) = R(s)\,[1 - T(s)]$

$$e(t)_{t\to\infty} = e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

سوال ۳ (۳-۲/۵ نمره) مکان هندسی ریشه‌ها ⟵ در حد چیزهایی که حل شده
کامل خودتان بدست می‌آورید

الف) K نقاط مهم را بدست آورید.
محل برخورد با محور
K ورود
K خروج

زاویه مجانب و ...

در مورد K شیب به پایداری صحبت می‌کنند که اگر K زیاد شود قطب می‌رود ادامه

۷۵

ب) روهوا منفرد قطب می‌دهد و باید شکل تقریبی مکان را رسم کنیم.

نمره (۰/۲۵×۴)

سوال ۴

(۳/۵-۴ نمره)

نیم عدد رسم دیاگرام بود ← رسم دیاگرام بود ① ← رسم نکلز ② ← اگر حلقه بسته شد $GM=?$ $PM=?$

دقت در دقیق رسم شود.

← به شرط اینکه شکل نگاه شود درست باشد. نمره آن دیجیتال است یا ۰ یا ۱

سوال ۵

(۳/۵-۴ نمره)

نایکوییست ← اگر ۱ بشود شکل آن سمت می‌شود ← می‌آید.

ولی G و S داده می‌شود یعنی نوع سیستم را می‌شود ولی ممکن است که GH یا G قطب سمت راست داشته باشد.

← مقدار نایکوییست نیاز به تسلط بیشتری دارد.

سوال ۶

توضیحی درباره GM و PM و نیز محاسباتی درباره آنان

نمره ۵/۰ نمره‌ای

مثلا اگر این اتفاق بیفتد چه می‌شود

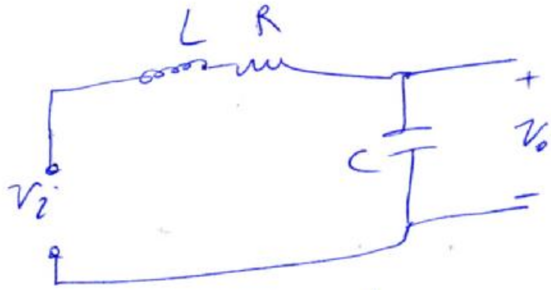
سوال ۷

(۱/۵-۲ نمره)

از جبران سازها

مجموع بارم ۲۱ نمره

مثال: یک میان ترم = ا پایان ترم

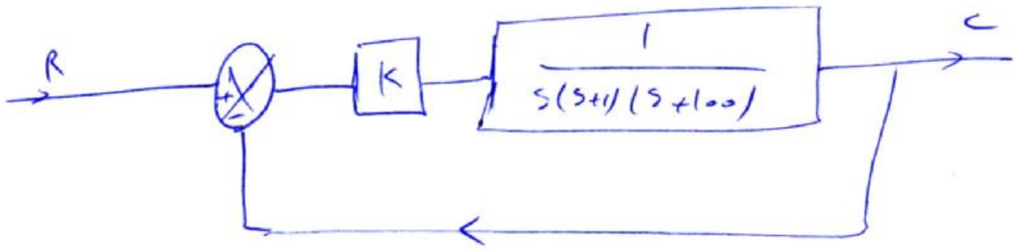


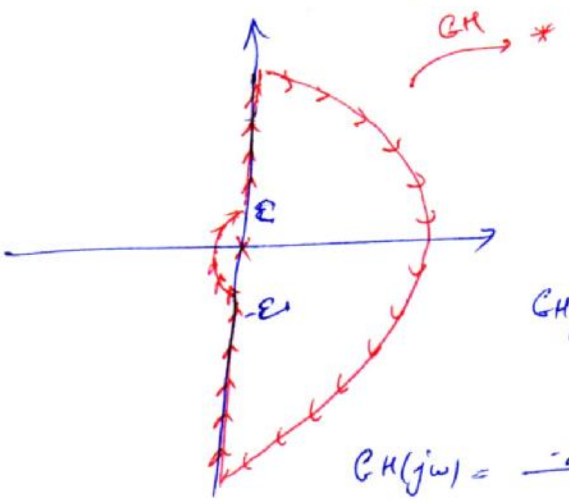
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R+Ls} = \frac{1}{LCs^2+RCs+1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \longrightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$2\xi\omega_n = \frac{R}{L}$$

مثال: پایداری سیستم زیر را با استفاده از معیار پایداری نایکوییست بررسی نمایید. از مسیر نشان داده شده مسئله را حل نمایید.
با فرض $K>0$





$$GH = \frac{K}{s(s+1)(s+100)} \rightarrow GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+100)}$$

$$GH(j\omega) = \frac{K(1-j\omega)(100-j\omega)}{j\omega(\omega^2+1)(\omega^2+10000)} = \frac{K(100-101j\omega-\omega^2)}{j\omega(\omega^2+1)(\omega^2+10000)}$$

$$GH(j\omega) = \frac{-jK(100-\omega^2)-jK(-101j\omega)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+10000)} =$$

$$= \frac{-101K}{(\omega^2+1)(\omega^2+10000)} + j\frac{K(\omega^2-100)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+10000)}$$

77

$$GH(j\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\,\sqrt{\omega^2+10000}} \angle -90 - tg^{-1}\frac{\omega}{1} - tg^{-1}\frac{\omega}{100}$$

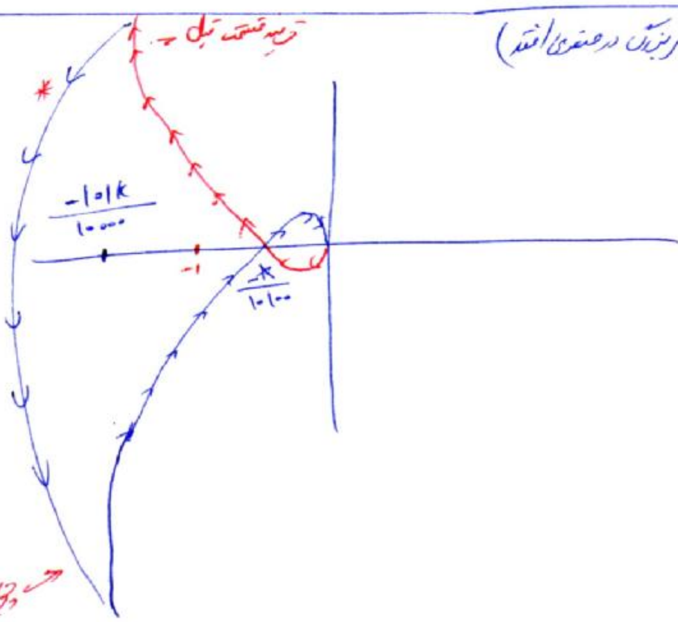
(این بزرگ در حقیقی افتد)

$\omega \to \infty \qquad -0 + j0$

$\omega \to 0 \qquad \dfrac{-101K}{10000} - j\infty$

$\omega = 10 \;\to\; GH(j\omega) = \dfrac{-K}{10100}$

محل برخورد با محور حقیقی



$S = \varepsilon e^{j\phi}$

چرخش عکس عقربه‌ها دور نمودار قطبی

$$GH = \frac{K}{S(S+1)(S+100)} = \frac{K}{\varepsilon e^{j\phi}(\varepsilon e^{j\phi}+1)(\varepsilon e^{j\phi}+100)} =$$

$\varepsilon \to 0$

$$= \frac{K}{100\varepsilon e^{j\phi}} = \frac{K}{100\varepsilon} e^{-j\phi} = \infty \angle \phi$$

$$\left|\frac{-K}{10100}\right| < |-1| \quad \to K < 10100$$

$Z = N + P$

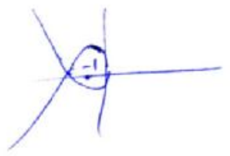
$Z \to 0$ ← برای شرایط سیستم پایدار است.

$N = 1 - 1$ ، $P = 1$

دور زدن (۱-)

۷۸

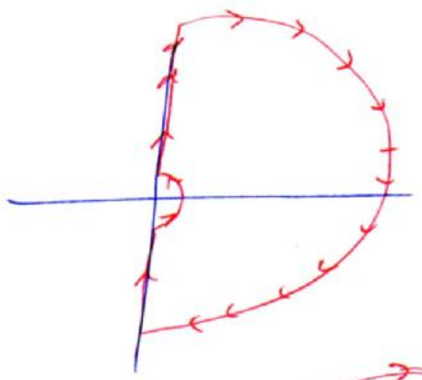
$$\left|-\frac{k}{1010}\right| > |-1| \rightarrow k > 10100$$



$Z = N + P \rightarrow Z = 1 + 1$

N: ۱، P: ۱

۲ ← سیستم ناپایدار



$k < 10100$

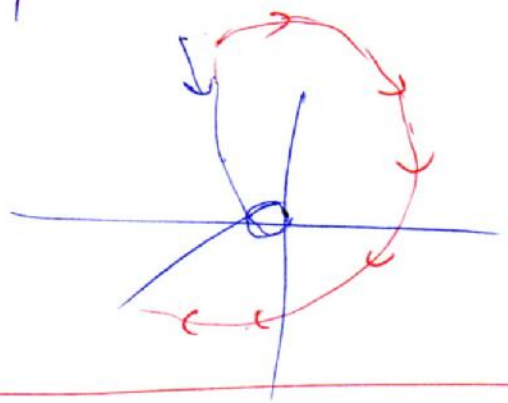
$Z = N + P$

ناپایدار ← ۰، ۰

$k > 10100$

$Z = N + P$

سیستم ناپایدار ← ۲، ۲، ۰



معادله مشخصه سیستمی بصورت زیر است مکان هندسی ریشه‌های مشخصه سیستم را رسم کنید

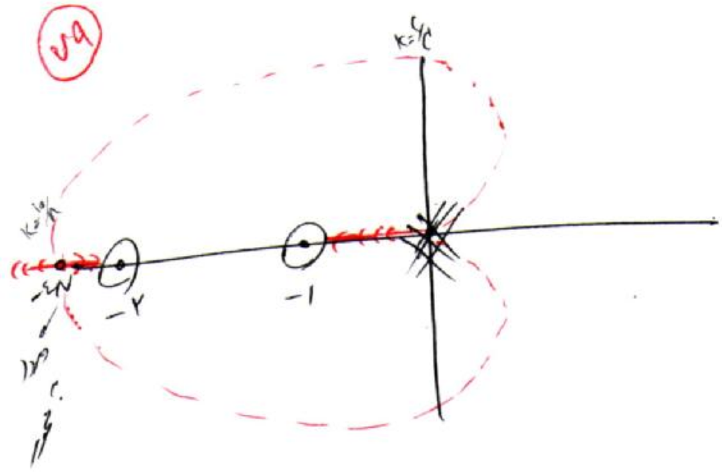
$$F(s) = s^3 + ks^2 + 3ks + 2k$$

$$F(s) = s^3 + k(s^2 + 3s + 2)$$

از روی معادله مشخصه در آمد

$$1 + \underbrace{k\frac{(s^2+3s+2)}{s^3}}_{GH} \Rightarrow GH = \frac{k(s+1)(s+2)}{s^3}$$

۱۰



زاویه خروج از قطب:

$$3\phi - 0 = \pm 180^\circ \Rightarrow \phi = \pm 60^\circ$$

مکان برخورد با محور ← روش عددتیز

$s = j\omega$

$3k^2 > 2k \Rightarrow k > 2/3$

روش عددتیز $\Rightarrow F(s) = s^3 + ks^2 + 3ks + 2k$

s^3	1	$3k$
s^2	k	$2k$
s^1	$\dfrac{3k^2 - 2k}{k} \to = 0$	
s^0		

$\Rightarrow k = 2/3$

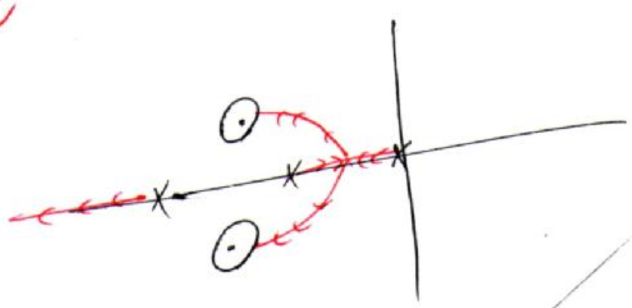
$\frac{2}{3}s^2 + \frac{4}{3} = 0 \rightarrow s = \pm\sqrt{2}\,j$

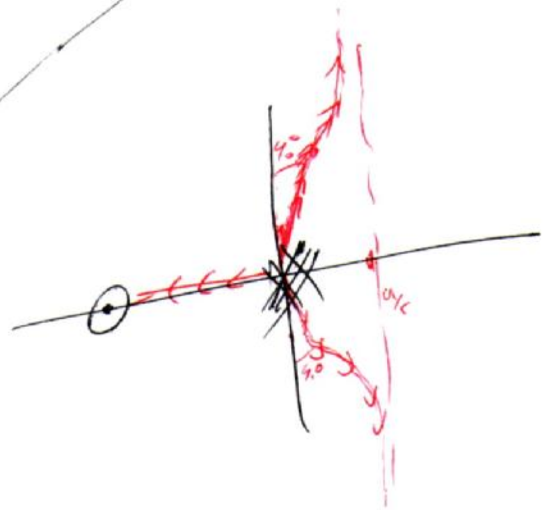
$$\frac{dk}{ds} = 0 \longrightarrow s = -3 - \sqrt{3} \simeq -4.7$$

$$K_{-4.7} = \frac{(4.7)^3}{(2.7)(3.7)} \simeq 10.8$$

اگر k را خیلی زیاد کنیم یک قطب به ‎-1، دیگر قطب به ‎-2، و یک قطب به ‎-∞ می‌رود.

۸۰

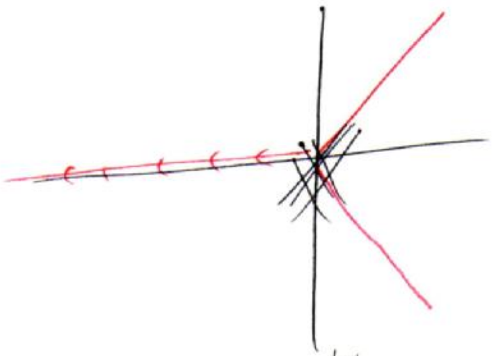


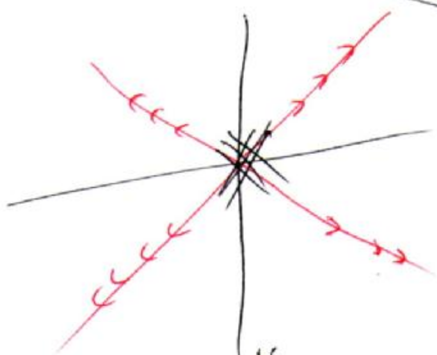


$$\frac{0-(-9)}{2} = +\frac{9}{2}$$

$\frac{180}{2} = 90^\circ$ ← زاویه خروج از قطب

جاب زاویه $= \pm 90^\circ$





$0-0 \ldots 0$

$\frac{180}{2} = 90$

$\frac{180}{4} = 45^\circ$

ص ۱۳

مثال: رسم دیاگرام بود

نیکولز

تعیین GM
PM

(۸۱)

$$G(s) = \frac{100(s+1)}{s^2(s+10)(s+100)}$$

دوتا دو بشود

فاز

-180

درجا -90

دامنه

$-40 \log \omega$

یعنی -40 [illegible]

برای کنترل سه اوگاتا

جزوه پارسه

ص ۱۴ هم دارد ولی در امتحان نمی‌آید.

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

$$20 \log \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right| = \begin{cases} 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} & \omega \gg \omega_n \\ 20 \log 2\xi & \omega = \omega_n \\ 0 & \omega \ll \omega_n \end{cases}$$